SUGL' INGRANAGGI.

APPENDICE

ALLA

GEOMETRIA DESCRITTIVA

del signor LEROY

Professore della Scuola Politecnica e della Normale,
Cav. della Legion di Onore, ec. ec.



NAPOLI,
DALLA REALE TIPOGRAFIA MILITARE
1844.

AVVERTIMENTO.

La seconda edizione della Geometria Descrittiva del signor Leroy contiene la teorica degl' *ingranaggi*, e nel resto non differisce quasi dalla prima edizione. Pertanto, come appendice alla traduzione con note che di detta geometria fu pubblicata nel 1838 si dà ora la traduzione di quella teorica; e per renderla utile anche a coloro che si trovassero possedere una Geometria Descrittiva diversa da quella del signor Leroy, si sono desunte da quest' opera e raccolte nel primo capitolo di quest'appendice le dottrine necessarie agl' ingranaggi.

CAPITOLO I.



TEORICHE DI GEOMETRIA DESCRITTIVA NECESSARIE AGL' INGRANAGGI.

Delle Epicicloidi.

1. Una curva mobile *xay* si dice *ruotare* sopra una curva fissa XAY, quando alcuni elementi eguali *ab* =AB, *bc*=BC,... si applicano rispettivamente gli uni sugli altri, di maniera che il punto *b* giunga a coincidere con B, in seguito *c* con C, *d* con D, e così gli altri. Val quanto dire, che il luogo di contatto il quale è attualmente in A ed *a*, dee percorrere nello stesso tempo spazî eguali sulle due curve in una volta, mentre se questi spazî fossero disuguali, e che il punto *b* venisse a coincidere con C, vi sarebbe contemporaneamente *ruotamento e strisciamento* di una curva sull'altra; e finalmente vi sarebbe un semplice strisciamento senza alcuna rotazione, se fosse lo stesso punto *a* della curva mobile, che venisse a coincidere successivamente con B,C,D,...Queste distinzioni si applicano egualmente alle curve storte, ed a quelle che giacciono nello stesso piano o in piani differenti, semprechè la curva mobile abbia costantemente *una tangente comune* con la curva fissa. FIG. 1.

2. Durante la rotazione della curva *xay*, un punto qualunque *m*, fisso su questa linea mobile e trasportato con essa, descriverà nello spazio un'altra curva *mz*, che or ora impareremo a costruire mediante diversi esempî; ma in tutt' i casi la tangente *mt* relativa ad una posizione qualunque, sarà sempre *perpendicolare alla retta* Am che riunisce il punto generatore col punto di contatto corrispondente. Infatti, quando le due curve *xy* ed XY si toccano in A, esse hanno in questo sito un elemento comune AA′; or mentre che i due elementi così confusi si distaccano, e fintanto che quelli vicini *ab* ed AB siano pervenuti a coincidere, il vertice A resta *immobile*, ed il

punto generatore m descrive un arco mm' infinitamente piccolo, e situato evidentemente sulla sfera di raggio Am. Dunque la tangente mt, che dee essere il prolungamento di questo elemento mm', sarà perpendicolare alla retta Am, la quale sarà così *normale* alla curva $mm'z$. Inoltre, ben si scorge che questo ragionamento applicherebbesi istessamente a qualunque punto n il quale, senza esser situato sul perimetro della curva ruotante xy, si troverebbe ligato fissamente con essa, e descriverebbe un'altra curva nu la cui normale sarebbe anche An. Dunque in tutti i casi *la retta che congiunge il punto di contatto della curva ruotante col punto generatore, è una* NORMALE *alla curva che vien descritta da questo ultimo punto*.

FIG. II. Se si volesse conservare alla dimostrazione precedente tutto il rigore di forma del quale è suscettiva, farebbe d'uopo primieramente sostituire alle due curve xy ed XY due poligoni (*fig.* 2) di lati rispettivamente eguali; poscia facendoli ruotare l'uno sull'altro in modo che i loro piani facessero tra loro un angolo costante o variabile, il punto m descriverebbe una linea discontinua $mm'm''$...composta d'archi *sferici* che avrebbero i loro centri successivamente in A,B,C, ... e tali che la tangente mt al punto m sarebbe perpendicolare ad Am. Ora è evidente che questa ultima proprietà sussisterà sempre, qualunque sia la grandezza dei lati e degli angoli de' due poligoni; solamente a misura che gli angoli aumentano ed i lati decrescono, gli archi mm', $m'm''$,.. diminuiscono di lunghezza, ed i due raggi consecutivi più si approssimano all'eguaglianza, ciocchè avvicina sempre più la linea $mm'm''$... ad una curva continua. Dunque poichè in tutte queste variazioni l'angolo Amt resta costantemente retto, sarà ancora lo stesso quando i due poligoni saranno divenuti due curve qualunque, a modo di esempio due cerchi; sicchè in quest'ultimo stato, la curva continua descritta allora dal punto m, avrà per tangente in m una retta perpendicolare ad Am.

EPICICLOIDI PIANE.

3. *PRIMO CASO.* Consideriamo un cerchio mobile O′ il quale ruota esteriormente sopra un cerchio fisso O, restando sempre nello stesso piano di quest' ultimo, ed adottiamo per punto generatore il punto attuale di contatto D di queste due circonferenze. Quando il cerchio O′ avrà ruotato fino a toccar l'altro in un punto A_4, si ritroverà la posizione corrispondente M del punto generatore D, descrivendo dal punto O'_4 come centro, e con il raggio O′ D una circonferenza, sulla quale si prenderà un arco A_4M della stessa lunghezza assoluta dell'arco A_4D, ciocchè si effettuerà misurando quest' ultimo mediante una piccolissima apertura di compasso. Ma queste operazioni si eseguiranno con maggiore sollecitudine, se dapprima si abbia avuto cura di dividere la circonferenza mobile in parti eguali, e di riportarle sul cerchio fisso secondo DA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... ; perchè allora basterà descrivere due archi di cerchio, l'uno dal centro O'_4 con un raggio $O'_4M = O'D$, l'altro dal centro A_4 con un raggio A_4M eguale alla corda D4 del cerchio primitivo O′. Costruzioni simili mandate ad effetto per altri punti di contatto A_3, A_6.... metteran nel caso di tracciare facilmente la curva DMGF chiamata *EPICICLOIDE esteriore*, la quale comprende un'infinità di rami identici a quello che veniamo di citare, e che si collegano gli uni agli altri con dei punti di regresso come D ed F. FIG. III.

4. La tangente al punto M di questa curva, sarà precisamente la retta MT corda supplementale di MA_4, poichè sappiamo (*n.* 2). che questa ultima è *normale* all' epicicloide. Questa proprietà somministra anche una traccia molto più semplice, ed acconcia sufficientemente per gl' ingranaggi; perchè, se si descrivono diversi archi di cerchio aventi per centri i punti A_1, A_2, A_3, ... e per raggi le corde D1, D2, D3,... del cerchio primitivo O′; poscia, se si traccia una curva inviluppo di tutti questi archi, siffatto inviluppo sarà precisamente l'epicicloide DMGF, attesochè queste corde dinotano evidentemente (*n.* 2) le lunghezze delle

normali, siccome MA_4, le quali terminerebbero ai punti successivi di contatto A_1, A_2, A_3, ... del cerchio mobile. Questo metodo è stato appunto proposto dal Signor *Poncelet*.

5. Si potrebbe adottare un punto generatore D' situato fuori del cerchio mobile, ma unito a questo invariabilmente. Allora il mentovato punto D' descriverebbe una curva a nodo $D'M'G'$... che addimandasi *epicicloide allungata*, e che si costruirebbe, prendendo su ciascun raggio $O'_4 M$ determinato come al *n. 3*, una distanza $MM'=DD'$. La retta $A_4 M'$ sarebbe ancora (*n. 2*) normale a questa curva; sicchè la tangente $M'T'$ dovrà esser condotta perpendicolarmente ad $A_4 M'$.

Se il punto generatore D'' stasse dentro il cerchio mobile, la curva descritta allora sarebbe una *epicicloide raccorciata* $D''M''G''$, la quale offrirebbe alcuni punti di flesso in vece di un nodo. Un punto qualunque M'' di questa curva si otterrà del pari prendendo sul raggio $O'_4 M$, costruito come al *n. 3*, una distanza $MM''=DD''$; e poichè la retta A_4M'' sarà anche (*n. 2*) normale a questa epicicloide, la tangente $M'' T''$ se ne dedurrà immediatamente.

FIG. IV. 6. *Secondo caso*. Quando il cerchio mobile O' ruota nella concavità del cerchio fisso O, e che il primo ha un raggio $R'<\frac{1}{2}R$, il punto generatore D descrive una epicicloide *interna* la quale presenta la forma DGF, che del resto si costruisce come precedentemente. Se si scegliesse il raggio $R'=\frac{1}{4}R$, come nella

FIG. V. fig. 5, la curva DMFD′F′ avrebbe una forma ed una equazione simile a quella della sviluppata dell' ellisse [*fig. 76*](*), con la sola differenza che i quattro punti di regresso sarebbero qui situati ad eguale distanza dal centro [Vedete la nota del *n. 485*].

FIG. IV. 7. *Epicicloide rettilinea*. Questo caso particolarissimo e molto utile per gl' ingranaggi, si presenta quando si sceglie il raggio

(*) *Le citazioni delle figure e dei numeri, poste fra parentesi simili all' attuale, si riferiscono al Trattato di Geometria Descrittiva.*

del cerchio mobile $R''=\frac{1}{2}R$; perchè allora l'epicicloide descritta da un punto del cerchio O'' si *confonde col diametro* D''OD che passa per la posizione iniziale D'' del punto generatore. In fatti, se consideriamo il cerchio mobile in un periodo qualunque della sua rotazione, in cui tocca il cerchio O in A, ed in cui taglia il diametro D''O in M, basterà dimostrare che gli archi AM ed AD'' sono eguali di grandezza assoluta, poichè allora sarà certo che il punto generatore situato dapprima in D'', sarà pervenuto in M sul diametro D'' O. Or l'angolo AO'' M è evidentemente doppio di AOD''; dunque gli archi AM ed AD'' sono anche doppî uno dell'altro, inquanto al numero dei gradi ch'essi contengono: ma il primo di questi archi appartiene ad una circonferenza la quale è metà dell'altra, dunque la lunghezza assoluta di AM eguaglia quella di AD''.

8. *terzo caso*. Supponiamo ora che il cerchio mobile O' il quale ruota nella concavità del cerchio O, abbia il suo raggio $R'>\frac{1}{2}R$; dico che l'epicicloide DGF descritta allora dal punto generatore D, coinciderà con quella che descriverebbe un terzo cerchio O'', che avrebbe un raggio $R''=R-R'$, e che girerebbe *nel verso contrario* di O'. Per dimostrarlo, considero il cerchio mobile O' pervenuto in una situazione qualunque O'_2, dove il punto generatore occuperà una posizione M tale che l' arco AM=AD. Conduco la retta MO'_2, e la sua parallela OB; poscia, termino il parallelogrammo OO'_2MO'' il quale dà $O''B=O''M=R-R'$, e traccio finalmente il cerchio O''. Ciò fatto, resterà a dimostrare che gli archi BM e BD hanno la stessa lunghezza assoluta: ora i tre archi BA, AM, MB, i quali misurano angoli evidentemente eguali, devono essere proporzionali a'loro raggi, ciò che dà FIG. VI.

$$\frac{BA}{R}=\frac{AM}{R'}=\frac{BM}{R''};$$

e poichè si è fatto $R''+R'=R$, ne risulta che BM+MA=BA: ma già si sa che l'arco AM=AD; dunque resta BM=BD.

9. *quarto caso*. Finalmente, supponiamo che il cerchio mobile O' abbia un raggio $R'>R$, nel qual caso inviluppérà il cer- FIG. VII.

chio fisso. Allora l'epicicloide descritta dal punto generatore D sarà *esteriore*, e ciascun ramo DGF occuperà sul cerchio fisso un arco DEF eguale all'eccesso della circonferenza O' sulla circonferenza O. Inoltre si dimostrerà facilmente, come al *n. 8*, che questa epicicloide DGF coincide con quella che descriverebbe un cerchio O'' tangente esteriormente al cerchio O, ed il cui raggio sarebbe $R'' = R' - R$.

FIG. VIII. 10. Quando si suppone *infinito* il raggio R del cerchio fisso, questo cerchio diviene una retta DAF sopra la quale ruota il cerchio O'; ed un punto qualunque M della circonferenza di quest'ultimo descrive allora la *cicloide* DMGF, la cui normale è parimente MA, e la tangente MT. La costruzione di questa curva si effettuerà facilmente col mezzo indicato al *n. 3*; d'altronde la cicloide sarebbe *allungata* o *raccorciata*, come al *n. 5*, se il punto generatore fosse situato al di fuori o al di dentro del cerchio mobile.

FIG. IX. 11. Al contrario se è il raggio del cerchio mobile quello che si suppone infinito, questo cerchio diverrà una retta indefinita DX, la quale ruotando sulla circonferenza O, descriverà con ciascuno dei suoi punti D una spirale DM'M''M'''..., la quale non è altro che la sviluppante del cerchio O [*n. 201*]. D'altronde poichè le normali M'A', M''A'', ... sono precisamente i raggi di curvatura [*n. 198*] di questa spirale, se dai punti A', A'', A''',... si descrivono con raggi eguali a Da', Da'', Da'''... altrettanti archi di cerchio, questi si confonderanno per un'estensione molto considerevole colla stessa spirale, ed offriranno un mezzo esattissimo e comodissimo per tracciare questa curva.

EPICICLOIDI SFERICHE.

TAV. II. FIG. X. 12. Consideriamo ora due cerchi OA e CA, il secondo dei quali giri sul primo e vi si mantenga tangente, di maniera che i piani rispettivi facciano fra loro un angolo costante $CAX = \omega$: durante questa rotazione, un punto qualunque M, fisso sulla circonferenza mobile e trasportato con questa, descriverà nello

spazio una curva DM. . . che chiamasi Epicicloide *sferica*, per essere situata interamente sulla superficie di una sfera costante. In fatti se per i centri de' due cerchi, s' innalzino su' piani di essi le perpendicolari OS e CS, questi due *assi* s' incontreranno necessariamente in ciascuna delle posizioni del cerchio mobile; perchè, in ogni punto di contatto come A, i piani AOS ed ACS saranno evidentemente perpendicolari alla tangente comune AV e però essi coincideranno. Inoltre siccome l'angolo OAC è il supplemento di CAX$=\omega$, che resta costante durante la rotazione, ne segue che il quadrilatero OACS avrà due lati e tre angoli la cui grandezza rimarrà invariabile, e per conseguenza lo stesso avrà luogo pe' lati OS e CS, il cui punto d'incontro S resterà immobile; donde risulta che la distanza di questo punto S al punto mobile M sarà costantemente eguale ad SA, e però l'epicicloide giacerà interamente sulla sfera che avrà per raggio SA.

13. Inoltre se s'immaginano due coni di rivoluzione, aventi per vertice comune il punto S e per basi i cerchi OA e CA, è evidente che questi coni avranno un piano tangente comune SAV; e per conseguenza la generazione dell'epicicloide può enunciarsi della maniera seguente: *se due coni di rivoluzione*, che han sempre lo stesso vertice e generatrici di eguale lunghezza, ruotino l' uno sull' altro, senza strisciare, restando tangenti lungo una generatrice variabile, *un punto qualunque, fisso sulla base del cono mobile, descriverà la curva detta epicicloide sferica.* In effetto dee da ciò rilevarsi che le circonferenze delle due basi saranno sempre *tangenti* una dell'altra, e che i loro piani conserveranno *un'inclinazione costante*; ed è anche questo il mezzo più comodo per adempiere meccanicamente le due condizioni, durante la rotazione del cerchio mobile sul cerchio fisso.

14. Si costruisca la proiezione dell'epicicloide sul piano della base del cono fisso, considerando questo piano come orizzontale, e si adotti per piano verticale, quello che passa per l'asse SO di detto cono e pel punto di contatto A delle due basi nella posizione attuale, che si rapporta ad un'epoca qualunque del movimento. Con ciò i due coni saranno proiettati verticalmente sui TAV. II. FIG. XI.

triangoli isosceli SAE, SAB', e la retta AB' rappresenterà la proiezione verticale del cerchio mobile, il quale ruotando intorno della tangente comune AV diverrà, abbassato, il cerchio *Amb*. Ciò premesso, sia D l'origine della epicicloide, vale a dire, la posizione che occupava il punto generatore, quando era in contatto col cerchio fisso; e poichè il cerchio mobile ha percorso ruotando sull'altro, l'arco DA, il punto generatore si troverà situato nel rabbassamento, ad una distanza curvilinea *Am* eguale in lunghezza assoluta all'arco AD (*). Dunque rialzando il cerchio *Amb* con farlo girare intorno ad AV, ed osservando che il punto (*m*, *m'*) descrive allora un arco *m'*M', il quale per essere perpendicolare all'asse di rotazione AV, si troverà proiettato sulla retta *m*M parallela alla linea di terra, si otterrà un punto (M,M') dell'epicicloide richiesta.

15. Per averne un secondo bisognerà immaginare che il cerchio mobile siasi rivolto fino a toccare il cerchio fisso, per esempio, in A'; allora potrebbonsi ricominciare sul piano verticale OA' abbassato, operazioni simili a quelle praticate sul piano verticale OA; ma sarà molto più semplice ridurre tutte le costruzioni ad effettuarsi in quest'ultimo. A tal fine supponiamo che i due coni dopo essersi toccati lungo il lato che termina in A', rotino simultaneamente, e *senza cangiare la loro posizione relativa*, intorno alla verticale OS, finchè il raggio OA' vada a coincidere con la primitiva linea di terra OAX. Allora il punto generatore

(*) Nel tracciare il disegno è bene incominciare dal dividere il cerchio mobile in parti eguali, e dal misurare una di queste parti facendo uso di corde sufficientemente piccole, e poi trasportar queste sul cerchio fisso: il che darà un arco uguale ad una delle divisioni del cerchio mobile. Si ripeterà poi l'applicazione di quest'arco del cerchio fisso tante volte quante sono le divisioni del cerchio mobile, e si avrà l'estensione DAF occupata da un ramo dell'epicicloide sul cerchio fisso. Nondimeno, se il rapporto dei due raggi OA e C'A fosse espresso da un numero abbastanza semplice, sarebbe più esatto prender da prima sul cerchio fisso un arco DAF eguale ad una frazione di questa circonferenza, espressa da tal rapporto, e poi dividere l'arco DAF in altrettante parti eguali che ne contiene il cerchio mobile.

si troverà, sul cerchio mobile abbassato, non più in *m*, ma ad una distanza A*n* eguale all' intervallo DA′, compreso tra l' origine D e la vera posizione A′ del punto di contatto; per modo che se si costruiscano come sopra le proiezioni N ed N′ del punto abbassato in *n*, non si avrà che a ricondurre OA in OA′, e poi trovare un punto N″ situato per rapporto a quest'ultima retta, nel modo stesso che il punto N giace rispetto ad OA: il che si eseguirà mediante il cerchio descritto colla distanza ON, su cui si prenderà l'arco I″ N″ eguale ad IN.

16. Si terrà lo stesso modo per ogni altra posizione del punto di contatto dei due cerchi, ed allorchè questo contatto avrà luogo nel mezzo K dell'arco DKF eguale alla circonferenza del cerchio mobile, si vede chiaro che il punto generatore si troverà abbassato in *b* che si projetta in B′ e B; se dunque si riconduce quest'ultimo punto sopra OK mediante un arco di cerchio BG, verrassi ad ottenere il *vertice* G dove la proiezione orizzontale dell' epicicloide si discosta più dal cerchio fisso.

Finalmente osserviamo che i punti D, M, N″, trasportati simmetricamente al di là di OG, per mezzo di archi di cerchio, daranno i punti F, M‴ ed N‴, appartenenti ancora all'epicicloide, la quale avrà per *asse* la retta OG, ed ammetterà infiniti rami identici a DGF.

17. Le costruzioni precedenti offrono ancora il mezzo di tracciare la proiezione verticale dell' epicicloide, poichè M′ appartiene a questa proiezione; e quanto al punto (N,N′) che si è trasportato in N″, senza cambiare di altezza, se ne troverebbe assai facilmente la proiezione verticale in quest'ultima posizione. Ma ciò nel nostro disegno non vedesi effettuato per non rendere il disegno stesso alquanto confuso, e specialmente perchè noi riguardiamo qui il piano verticale di proiezione non come in realtà esistente, ma soltanto come un mezzo di eseguire le nostre operazioni grafiche; attesochè la presenza di esso avrebbe reso invisibili gran parte delle linee del disegno. D'altronde, l'epicicloide è abbastanza determinata dall'intersecazione del cilindro verticale DMGF con la sfera del raggio SA, ch'è facile rappresentare sul piano orizzontale. 2

18. *Della tangente all'epicicloide.* Giacendo tutta questa curva (*n. 12*) sulla sfera fissa, che ha per centro il vertice S e per raggio l'apotema SA, il piano tangente a questa sfera in (M, M′) dovrà contenere la tangente dimandata. Inoltre avendo dimostrato che la retta (AM, AM′), la quale unisce il punto generatore col punto di contatto corrispondente A, è *normale* all'epicicloide, possiamo dedurne che la cercata tangente deve anche trovarsi nel piano perpendicolare a questa retta, il quale può riguardarsi come tangente di una sfera che avrebbe il centro in A, e per raggio la retta (AM, AM′). Ma questa seconda sfera varia di grandezza e di posizione, allorchè si passa da un punto ad un altro dell'epicicloide, e non può che *toccare* questa curva con cui ha soltanto di comune un elemento lineare; dunque il problema è ridotto a cercar l'intersecazione del piano tangente alla *sfera fissa* col piano tangente alla *sfera variabile*.

19. A tal fine tagliamo le due sfere col piano B′AV della base del cono mobile. La sezione prodotta da questo piano nella sfera SA è ad evidenza lo stesso cerchio AB′: abbassiamolo in A*mb*, e conduciamogli la tangente *m*P, la quale nel suo incontro P colla cerniera AV ne darà il punto dove rialzata interseca il piano orizzontale: così questo punto appartiene alla traccia orizzontale del piano tangente alla sfera SA, e questa traccia sarà la retta PT condotta perpendicolarmente sulla proiezione OM del raggio che termina nel punto proposto (M, M′). Quanto alla sfera variabile il cui raggio è (AM, AM′), essa vien tagliata dal piano B′AV secondo un cerchio massimo che, rotando intorno ad AV, coincide sul piano orizzontale col cerchio avente per raggio A*m*. Conduciamogli la tangente *m*Q (la quale dee metter capo al punto *b*), e rialziamo questa retta insieme col cerchio affine di trovare la traccia orizzontale Q di essa nella cerniera AV; allora questo punto Q apparterrà alla traccia del piano tangente della sfera variabile, e questa traccia del piano si otterrà conducendo la QX perpendicolare alla proiezione AM del raggio corrispondente. Ciò posto, le tracce QX e PT dei due piani tangenti intersecandosi in T, la retta TM sarà la proiezio-

ne orizzontale della tangente all' epicicloide, e la proiezione verticale T'M' se ne dedurrà proiettando il punto T sulla linea di terra.

20. *Altro metodo.* Si può ottenere questa tangente di una maniera molto più semplice mediante il *piano normale*[*n.214*]; perchè nel caso attuale conosciamo immediatamente due normali dell' epicicloide, una delle quali è il raggio della sfera costante, condotto dal vertice S al punto (M,M'), e l' altro è la retta (MA,M'A), in conseguenza di ciò che abbiamo dimostrato nel *n.* 2. Quindi se facciamo passare un piano per queste due normali, la tangente cercata dovrà essergli perpendicolare, e però le sue proiezioni saranno determinate. Ma la prima di queste normali evidentemente incontra il piano verticale in S, e la seconda in A; dunque SA è la traccia verticale del piano normale. In quanto all'altra, immaginiamo nel piano normale una retta ausiliare parallela ad SA; le sue proiezioni M'R',MR daranno il punto R dove la retta incontra il piano orizzontale, e per conseguenza AR sarà la traccia orizzontale del piano normale. Adunque, la tangente dell' epicicloide si otterrà menando MT perpendicolare ad AR, ed M'T' perpendicolare ad AS.

21. È importante l' osservare che nei punti di *regresso* D ed F, la proiezione orizzontale dell'epicicloide ha per tangenti i raggi OD ed OF. In fatti la retta variabile (AM,AM'), cui la retta tangente nello spazio è sempre perpendicolare, prolungata indefinitamente è una secante del cerchio mobile, come si scorge dal suo abbassamento A*m*; ma i due suoi punti di sezione A ed *m* trovandosi riuniti quando il punto di contatto A è giunto in D, la retta indefinita abbassata in A*m* diviene allora tangente del cerchio mobile, e quindi anche del cerchio fisso che nel tempo stesso tocca l' altro in D; dunque la tangente in D del cerchio fisso DA sarà precisamente la traccia orizzontale del piano normale, ed in conseguenza la tangente dell' epicicloide resterà proiettata sul raggio ODX'.

Quanto alla proiezione verticale di questa medesima tangente basterà proiettare il suo piede D in D' sulla linea della terra,

ed abbassare da quest' ultimo punto una perpendicolare sulla traccia verticale del piano normale relativo al punto D. Or questa traccia si ottiene facilmente, perchè deve passare evidentemente pel punto S, e pel punto in cui la linea della terra incontra la seconda normale, la quale al presente coincide colla tangente dell' arco DA.

Un modo affatto simile servirà a trovare le proiezioni della tangente nell'altro estremo F dell'epicicloide; e si fa chiaro che ciascuna di queste tangenti in D o in F, coincide precisamente colla tangente del cerchio massimo verticale della sfera costante il cui raggio è SA.

22. Nel *vertice* di questa curva, il quale è proiettato in G, la tangente sarà orizzontale, e perpendicolare al piano verticale OKG; perchè questo piano conterrà evidentemente le due normali del *n. 20*, quando il punto generatore sarà pervenuto all' estremo superiore B′ del diametro condotto pel punto di contatto del cerchio mobile.

23. Quando abbiamo cercato (*n.19*) la traccia QX del piano tangente alla *sfera variabile* il cui raggio è (AM,AM′) ci siamo valuti della considerazione che questo piano dovea contenere la tangente abbassata secondo *Qmb*. Ora quando essa è rialzata nel piano B′AV del cerchio mobile, va ad incontrare il piano verticale in B′; dunque B′X è la traccia verticale del piano tangente alla sfera variabile: di più questa traccia dee trovarsi perpendicolare a B′A, perchè su quest' ultima retta proiettasi il raggio (AM,AM′) menato al punto di contatto del piano tangente.

24. Osserviamo in oltre che nelle varie posizioni A,A′,.... del punto di contatto del cerchio mobile, la proiezione AB′ di questo cerchio sopra i corrispondenti piani verticali OA,OA′,... avrà sempre la stessa grandezza e la stessa inclinazione, in guisa che per tutti questi piani il triangolo rettangolo AB′X si terrà invariato nella grandezza, e quindi le tracce XB′ dei diversi piani tangenti alle sfere variabili, andranno tutte ad incontrare la verticale OS in uno stesso punto Z. Dal che nasce che se si

dovesse considerare un cono il cui vertice fosse Z, ed avesse per base l' epicicloide sferica, sarebbe toccato da tutti i piani simili a ZXQ, perchè ciascuno di questi conterrebbe il verticè ed una tangente della base. Di più tutti questi piani tangenti passerebbero successivamente per la retta fissa ZX, allorchè il cono *epicicloidale*, rotando intorno ad OZ trasporterebbe in M i diversi punti N'',G,N'''...: la quale proprietà è adoperata negl' ingranaggi conici che servono a muovere le *ruote ad angolo*. Vedete il *n. 107*.

25. *Sviluppante sferica.* Quando il cono mobile acquista una apertura tale che l' angolo al centro ASB (*fig. 10*) diviene eguale a 180°, questo cono riducesi ad un cerchio il cui raggio eguaglia l' apotema SA del cono fisso, ed il cui piano è tangente a quest' ultimo cono; in questo caso particolare l'epicicloide descritta da un punto M del cerchio mobile, prende il nome di *sviluppante sferica*, attesochè la questione si riduce ad enunciare semplicemente, che si fa ruotare su di un cono fisso SAO uno de' suoi piani tangenti SAV, come nella *fig. 9*. della tavola I, avevamo ottenuto la spirale *sviluppante del cerchio*, facendo ruotare su questa circonferenza una delle sue tangenti.

26. Siccome la curva in questione giace interamente sulla sfera che ha per raggio SA, basterà costruire la sua proiezione orizzontale. A tal fine abbassiamo il cerchio mobile il cui centro è al vertice (S,O), facendolo girare intorno della tangente AV che gli è comune col cerchio fisso; e su tale abbassamento S' prendiamo un arco Am eguale all' arco AD, adottando D per origine della sviluppante, vale a dire per la posizione *up* occupata dal punto generatore quando trovasi in contatto col cono fisso. Allora *m* sarà il rabbassamento di questo punto generatore quando il contatto è arrivato in A, e la sua effettiva posizione (M,M') si dedurrà facilmente da esso, facendo girare il cerchio S' intorno della cerniera AV per collocarlo sul piano tangente SAV. TAV. II FIG. XII.

Quando il cerchio mobile avrà ruzzolato fino a toccare il cerchio fisso in $A_{,}$, s'immagini che tutto il sistema giri simultanea-

mente, senza ruzzolare, intorno della verticale SO, per condurre il raggio OA_s sulla linea di terra OA; allora prendendo l'arco $An = DA_s$, il punto generatore si troverà abbassato in n, e proiettato in N ed N′: ma quindi, per riportare il cerchio mobile nella sua vera posizione, si descriverà col raggio ON una circonferenza sulla quale si prenderà l'arco $N N_s = II_s$. Si troverà così la curva DMN_s... per la proiezione orizzontale della sviluppante sferica.

27. *La tangente* in un punto qualunque (M, M′) dovrà esser condotta perpendicolarmente sul piano delle due normali di cui abbiamo parlato al n.° 20, le quali sono le rette che riuniscono il punto generatore (M,M′) col centro (O,S) e col punto di contatto attuale A. Or questo *piano normale* coincide evidentemente col piano SAV, in cui è situato il cerchio mobile e ch'è tangente al cono fisso; dunque basterà condurre MT perpendicolare ad AV, ed M′T′ perpendicolare ad SA.

28. Chiaramente appare che il ramo DMPGQF il quale sarà descritto dopo una rivoluzione intera del cerchio mobile, occuperà sulla base del cono, un arco DAGF eguale all'eccesso della circonferenza S′ sulla circonferenza O: ma inoltre bisogna osservare che questo ramo si comporrà di due parti riunite mediante un regresso al punto G medio di DGF, il quale è la proiezione della posizione la più elevata del punto generatore. Per rendersi ragione di siffatta circostanza, basta immaginare la falda superiore del cono SAE prolungata fintanto che sia terminata da un cerchio eguale a quello di raggio OA, ed osservare che il cerchio mobile S′ si trova in un piano variabile che tocca simultaneamente le due falde del cono, secondo una generatrice eguale al diametro di questo cerchio S′; donde risulta che mentre un certo arco Am della circonferenza mobile ruota sulla base inferiore del cono, l'arco diametralmente opposto ruota nello stesso tempo sulla base superiore; epperò quando il punto generatore m è pervenuto alla metà del suo corso, esso si troverà in contatto con la base superiore, e vi produrrà un regresso affatto simile a quello, che aveva avuto luogo al punto D di partenza sulla base inferiore del cono.

CAPITOLO II.

NOZIONI PRELIMINARI SUGL' *INGRANAGGI*.

29. Quando un corpo solido, di qual si sia forma gira intorno ad un asse fisso, tutti i suoi punti descrivono nello stesso tempo archi di cerchio corrispondenti ad angoli necessariamente eguali, poichè il sistema è di forma invariabile; dunque questi archi risultano proporzionali ai raggi rispettivi, che dinotano le distanze di questi diversi punti dall'asse fisso, e perciò le velocità *assolute* v, v', v'',.... di tutti i suddetti punti sono del pari proporzionali ai raggi r, r', r'', ... ; in guisa che se s'indichi con ω la *velocità assoluta* comune a tutti i punti che sono situati ad una distanza dall'asse *eguale all'unità*, si avranno sempre i rapporti.

$$\frac{v}{r}=\frac{v'}{r'}=\frac{v''}{r''}=\dots\ \omega,\ \text{da cui}\ v=r\omega,\ v'=r'\omega,\dots$$

La quantità ω addimandasi *velocità angolare* o *velocità di rotazione* del sistema, sia che resti costante o che vari col tempo. TAV. III. FIG. I.

30. Ciò posto, l'oggetto che si prende di mira in un ingranaggio cilindrico, è quello di stabilire fra due assi paralleli, proiettati in O ed O' siffatta dipendenza, che quando s'imprime al primo una velocità di rotazione ω, il secondo asse prenda una velocità di rotazione ω', la quale abbia con ω un *rapporto costante* ed assegnato per ciascuna quistione particolare. Or se si divide l'intervallo OO' in due parti $OA=R$, $O'A=R'$, che siano in ragione inversa delle velocità ω ed ω', o tali che si abbia

$$R : R' :: \omega' : \omega\ ;$$

poscia, se con queste distanze come raggi, si descrivano due cerchi tangenti in A, ciascuno dei quali sia unito invariabilmente col proprio asse, si raggiugnerà evidentemente lo scopo proposto, facendo girare questi due *cerchi primitivi* in guisa che i punti dell' una e dell'altra circonferenza prendano eguali *velocità assolute*. Perocchè dinotando queste con V e V' ne risulteranno le velocità angolari date dalle formole

$$\Omega=\frac{V}{R},\quad \Omega'=\frac{V'}{R'};$$

e se $V = V'$, si otterrà

$$\Omega : \Omega' :: R' : R :: \omega : \omega'.$$

Ma perchè le velocità assolute delle due circonferenze OA ed O'A siano eguali, fa mestieri evidentemente che i due punti A ed a, situati ora in contatto sulla linea dei centri, percorrano nello stesso tempo archi tali AA' ed aa' che siano *eguali di lunghezza assoluta*. Questa è in ultima analisi la condizione essenziale che dovrà essere adempiuta in ogni ingranaggio.

31. Affinchè il movimento di rotazione impresso alla ruota O sia trasmesso all' altra O' in maniera efficace, ed atta a vincere considerevoli resistenze, si guarniscono queste due ruote di sporgenze o *denti* terminati da superficie cilindriche, proiettate in alcune curve siccome AB ed ab. Ma se si può tracciare a piacimento uno di questi profili ab, l' altro non dee però essere scelto ad arbitrio, onde che non sia violata la condizione essenziale del n.° 30, la quale potrebbe non trovarsi adempiuta; e per enunziare più chiaramente la forma che conviene al profilo AB, esporremo la quistione in termini alquanto differenti.

TAV. III. FIG. II. 32. Immaginiamo che il cerchio O resti interamente immobile, e che il cerchio O' *ruoti* su quello, senza strisciare, traendo seco la curva ab, che fa corpo con esso. Se si prendano sulle diverse posizioni $O'_1, O'_2, O'_3, \ldots$ di questo cerchio mobile, gli archi

$$A_1\, a_1 = A_1\, A\ ,\ A_2\, a_2 = A_2\, A\ ,\ A_3\, a_3 = A_3\, A\ ,$$

si otterrà immediatamente l'epicicloide $a\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ (n.° 3): indi tracciando le curve $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2$, $a_3\, b_3$.. identiche ad ab per la forma e situazione relativa, queste si taglieranno consecutivamente ne' punti i, i', i'', i''', i quali daranno origine ad un poligono curvilineo; ma ravvicinando indefinitamente i centri O'_1, O'_2, O'_3, questo poligono diverrà, al limite, una curva continua A$e_1\ e_2\ e_3\ e_4$ B, che chiamasi *l' inviluppo* di tutte le curve particolari $ab, a_1 b_1, a_2\, b_2, \ldots$ perchè quella risulta manifestamente tangente a ciascuna di queste, che chiamansi le *inviluppate* [n.i 190, 192].

Ciò posto, io dico che siffatto inviluppo Ae_4B è il profilo che conviene adottare per dente della ruota O. In fatti se si facesse

girare intorno del centro O il sistema invariabile de' due cerchi O ed O'_4, senza nulla alterare della loro situazione relativa, fintantochè la retta $OA_4O'_4$ avesse ripresa la posizione verticale OAO', questi due cerchi starebbero allora, con le curve Ae_4B ed $a_4\,b_4$, in una posizione (*fig. 3*) manifestamente identica a quella, che avrebbero presa i due cerchi O ed O' della *fig.* 2, se questi avessero semplicemente *girato intorno ai loro centri immobili*, ed in maniera da imprimere alle circonferenze $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, velocità assolute *eguali*: perchè sulla *fig.* 3 chiaro si scorge che i punti A ed a_4 i quali si trovavano primitivamente in contatto sulla linea dei centri, avranno percorso gli archi A_4A ed A_4a_4 eguali *di lunghezza assoluta*, poichè essi sono gli stessi che gli archi A_4A ed A_4a_4 della *fig.* 2, i quali sono eguali giusta la definizione della rotazione data al *n.* 1. Dunque, siccome avrebbe luogo altrettanto per i cerchi O ed O'_3, O ed O'_2,... si può affermare che la condizione essenziale agli ingranaggi (*n.* 30) sarà perfettamente adempiuta, se si adotta per profilo coniugato di *ab* l' inviluppo Ae_4B definito come lo abbiamo di sopra.

33. Da quanto si è detto possiamo dedurre questo principio generale: far ruotare simultaneamente i due cerchi O ed O' intorno ai centri rispettivi immobili, ed in maniera che le circonferenze $\alpha\beta$, ed $\alpha'\beta'$ prendano velocità *eguali*, ciò vale lo stesso di far ruotare la circonferenza $\alpha'\beta'$ sull' altra $\alpha\beta$ interamente immobile, salvo a riportare in seguito il sistema di questi due cerchi, reso invariabile, nella situazione in cui la linea dei centri riprenderà la posizione primitiva OO'. Ma si dee comprendere che questa seconda maniera di movimento è più comoda per le operazioni grafiche, poichè si possono effettuare sul piano del cerchio O divenuto immobile.

Del pari se, nella prima ipotesi, faccia d' uopo trovare la curva gg_1g_2....descritta sul piano mobile del cerchio O, da un punto qualunque g legato invariabilmente colla circonferenza $\alpha'\beta'$, basterà far ruotare quest' ultima sulla circonferenza $\alpha\beta$ interamente *fissa*; ed allora il punto g descriverà un'epicicloide

allungata $gg_1g_2g_3$...che abbiamo imparato a costruire nel *n.5*, e che sarà la curva cercata.

34. Si scorge dunque, che per la teoria degl' ingranaggi, è necessario saper costruire *l' inviluppo delle posizioni successive che prende una curva* ab, *trasportata da un cerchio mobile* O′ *che ruota sopra un altro cerchio* O *interamente fisso*. Si potrebbe in vero esser contenti di tracciare questo inviluppo $Ae_1e_2e_3e_4B$ rendendolo sensibilmente tangente alle curve individuali ab, a_1b_1, a_2b_2,....costruite come al *n. 32*; ma si otterrà maggiore precisione, cercando direttamente la posizione dei punti di contatto mediante il teorema seguente.

Se si considera il cerchio individuale O'_3 con l' inviluppata corrispondente a_3b_3, e si conduca a questa una normale A_3e_3 a partire dal punto di contatto del cerchio mobile, dico che e_3 sarà il punto di contatto dell' inviluppo AB con la curva $a_3\ b_3$. Difatti, durante la rotazione del cerchio O'_3 per passare ad una posizione infinitamente vicina, il punto e_3 descrive (*n. 2*) un piccolo arco circolare e_3s, che ha per raggio la distanza A_3e_3: or poichè questa retta è stata condotta normale alla curva a_3b_3, l' arco e_3s starà interamente sull' inviluppata a_3b_3; dunque il punto s sarà comune all' inviluppata a_3b_3 ed a quella che la segue immediatamente, e perciò apparterrà all' inviluppo cercato AB. Ma questo inviluppo passerebbe ancora per un punto analogo s' situato a sinistra di e_3, e che sarebbe l' intersecazione della curva a_3b_3 con l' inviluppata che la precede immediatamente; sicchè l' elemento $s'e_3s$ è comune all' inviluppata a_3b_3 e all' inviluppo generale AB; per conseguenza il contatto di queste due linee è di fatti in e_3, e la loro *normale comune* è A_3e_3.

35. Conseguentemente, quando l' inviluppo *ab* sarà definito geometricamente, si sapranno condurre alle sue diverse posizioni quante normali si vogliano a partire dai punti A_2, A_3,... le quali faranno conoscere altrettanti punti e_2, e_3... dell' inviluppo generale. Se l' inviluppata *ab* non è data che graficamente, dopo averle fatta prendere la posizione a_3b_3, per esem-

pio, si cercherà un'apertura di compasso tale che descrivendo col centro A_2 un arco di cerchio, tocchi semplicemente la curva $a_2 b_2$: una piccola porzione di quest' arco apparterrà sensibilmente all' inviluppo, e raccordando tutti gli archi simili con un tratto continuo, si otterrà l' inviluppo cercato con una esattezza sufficiente nella pratica. Nonpertanto questa traccia offrirebbe ancora maggiore precisione, se si effettuasse con i raggi de' cerchi osculatori dell' inviluppo; per ciò darem tosto i mezzi di trovare questi ultimi.

36. Primieramente osserviamo, che se si facesse, al contrario, ruotare sul cerchio O' reso fisso, il cerchio O divenuto mobile e traente con esso la curva $Ae_1e_2e_3e_4$B, l' inviluppo di tutte le posizioni di quest' ultima curva sarebbe precisamente la linea *ab*. In effetto, quando un punto del cerchio O, A_2 per esempio, sarà venuto in contatto colla circonferenza O', la curva $a_2 b_2$, che tocca attualmente la linea Ae_2B coinciderà evidentemente con *ab*, e conseguentemente quest'ultima si troverà precisamente *tangente* alla posizione che avrà presa allora la linea Ae_2B.

37. *Centri di curvatura dell' inviluppo.* Sia O' una posizione qualunque del cerchio mobile, che tocca il cerchio fisso O nel punto α; siano *ab* l' inviluppata corrispondente a questa situazione, A *m* B l'inviluppo generale, C' e C i centri di curvatura di queste linee pel punto di contatto *m*, centri che debbono essere sulla normale comune αm, ed il primo dei quali è supposto conosciuto mediante la definizione della curva *amb*. Se si prendano su' cerchi primitivi due archi $\alpha\alpha_1$, ed $\alpha\alpha'$ che siano eguali di grandezza assoluta, ed infinitamente piccioli, la retta $C\alpha_1 m$, sarà (n.° 34) una normale dell' inviluppo, e $C'm'\alpha'$ una normale della inviluppata; or quando la rotazione del cerchio O' avrà portato il punto α' in contatto con α_1, le due normali $C\alpha_1$, e $C'\alpha'$ staranno necessariamente in linea retta, del pari che i due raggi $O\alpha_1$, ed $O'\alpha'$; donde si conchiude che gli angoli $O\alpha_1C$ ed $O'\alpha'C'$ debbono essere eguali attualmente, posciachè non cambieranno di grandezza durante TAV. III. FIG. IV.

la rotaziono del cerchio O'. Ciò posto, dinotando con φ l'angolo $O\alpha C = O'\alpha C'$, si ha evidentemente

$$O\alpha_1 C = \varphi + O - C, \qquad O'\alpha' C' = \varphi + C' - O';$$

ed eguagliando queste due espressioni, risulta

$$(a) \qquad O + O' = C + C'.$$

Per valutare questi ultimi angoli, bisogna prendere gli archi descritti dai loro vertici con un raggio eguale all'unità, e paragonare questi archi con $\alpha\alpha_1$, ed $\alpha\alpha'$ che debbonsi considerare come una sola linea retta perpendicolare ad $O\alpha O'$. E quindi ponendo

$$O\alpha = R, Cm = \rho, O'\alpha = R', C'm = \rho', \alpha m = p, \alpha\alpha_1 = \alpha\alpha' = ds,$$

si otterrà facilmente

$$\text{Ang. } O = \frac{ds}{R},\ O' = \frac{ds}{R'},\ C = \frac{ds.\cos\varphi}{\rho - p},\ C' = \frac{ds.\cos\varphi}{\rho' + p};$$

e sostituendo questi valori nella equazione precedente (a), verrà

$$(A) \qquad \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho' + p}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}:$$

formola semplicissima che farà conoscere il raggio di curvatura ρ dell'inviluppo, e quindi il suo centro di curvatura C, quando si conoscerà il raggio ρ' dell'inviluppata.

38. Si prevede facilmente, senza tracciare una nuova figura, che si dovrà cambiare il segno di ρ' in questa formola, quando il centro C' cascherà dalla medesima banda di C rispetto al punto m: lo stesso convien fare per R', se il centro O' è situato dalla medesima banda di O relativamente al punto di contatto α di questi due cerchi. Cosicchè nel caso della *fig. 5*, l'equazione (A) prenderà la forma

TAV. III. FIG. V.

$$(B) \qquad \left(\frac{1}{\rho - p} - \frac{1}{\rho' - p}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'},$$

la quale è simmetrica in tutte le sue parti. Sotto questo punto di veduta sarebbe stato più conducente stabilire la dimostrazione sulla *fig. 5*, in cui i centri sono situati dalla stessa banda della tangente; ma siccome questo ultimo caso si offre raramente negl' ingranaggi, abbiamo voluto fissare l'attenzione sopra i dati più frequenti. Le formole (A) e (B), e quelle del n.° 41 sono dovute a M. *Savary*, del pari che l'elegantissima costruzione grafica che andiamo ad esporre.

39. Congiungiamo i centri O e C, O' e C' con due linee rette, e poscia prolungandole cerchiamo i punti D e D' ove incontreranno la perpendicolare αD elevata sulla normale comune CαC'; avverrà che questi due punti D e D' si confonderanno. In fatti, se dai centri O ed O' si abbassano le perpendicolari sulla normale CαC', si formeranno dei triangoli simili con CαD C'αD', da' quali si dedurrà facilmente TAV. III. FIG. VI.

$$\alpha D = \frac{(\rho - p) R \operatorname{sen} \varphi}{R \cos\varphi - (\rho - p)}, \quad \alpha D' = \frac{(\rho' + p) R' \operatorname{sen} \varphi}{(\rho' + p) - R' \cos\varphi}.$$

Or la formola (A) dà, permutando il secondo ed il terzo termine,

$$\frac{R \cos\varphi - (\rho - p)}{(\rho - p) R} = \frac{(\rho' + p) - R' \cos\varphi}{(\rho' + p) R'}:$$

ciò che prova essere eguali i valori precedenti di αD ed αD'.

40. Epperò, quando si conoscerà il centro di curvatura C' per il punto *m* dell' inviluppata *amb*, si condurrà la retta C'O' la quale si prolungherà fintantochè incontri in un punto D la perpendicolare αD elevata sulla normale αmC': poscia congiungendo questo punto D con O, la retta OD taglierà la normale prolungata C'α nel punto C, che sarà il centro di curvatura dell' inviluppo *AmB* per il punto *m*. Laddove l' inviluppata *amb* in vece di essere definita dalle sue proprietà geometriche fosse data graficamente, si tracceranno vari cerchi tangenti in *m* a questa curva, e scegliendo fra essi quello che maggiormente sembrerà confondersi con *ab* all' intorno del punto *m*, il suo centro potrà esser preso in vece del punto C'.

In tutti i casi, descrivendo con varî raggi come C*m* dei piccoli archi di cerchio, e raccordandoli con un tratto continuo, si otterrà la traccia dell' inviluppo A*m*B nella maniera grafica la più esatta.

41. Pria di applicare tali risultamenti a diversi esempî, faremo un' osservazione importante per la teorica degl' ingranaggi; cioè che durante la rotazione del cerchio O' sul cerchio fisso O, la curva *amb* non ruota semplicemente sopra A*m*B, ma *striscia* nello stesso tempo su questa ultima (n.° 1), donde risulta fra i denti delle due ruote un *attrito* che consuma una TAV. III. FIG. IV.

parte della forza motrice. Infatti quando in un istante qualunque i cerchi O ed O′ si toccano in α, il contatto m dell'inviluppo con l'inviluppata è dato dalla normale $C\alpha mC'$ condotta da questo punto α; dunque, quando uno spostamento infinitamente piccolo avrà fatto toccare i cerchi ne' punti α' ed α_1, le normali corrispondenti saranno le rette $C'\alpha'$ e $C\alpha_1$, le quali determinano i punti m' ed m_1 dove l'inviluppata e l'inviluppo si toccheranno a questo secondo istante del movimento. Or se gli archi mm' ed mm_1 non sono eguali e diretti dalla stessa banda, è chiaro che vi sarà strisciamento di una delle curve sull'altra: calcoliamo dunque questi archi.

Si ha manifestamente

$$mm_1 = \frac{\rho\cos\varphi.ds}{\rho - p}, \quad mm' = \frac{\rho'\cos\varphi.ds}{\rho' + p};$$

dunque $mm_1 - mm' = \left(\frac{\rho}{\rho - p} - \frac{\rho'}{\rho' + p}\right)\cos\varphi\, ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)pds,$

riducendo mediante la formola (A). Inoltre se si consideri uno spostamento di grandezza finita, rappresentato da $s'' - s'$ sul cerchio fisso, la differenza di questi archi percorsi sullo inviluppo e sulla inviluppata dal loro punto di contatto, sarà data dall' integrale definito

$$\delta = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\int_{s'}^{s''} pds;$$

dunque escludendo il caso inusitato, in cui la porzione di normale $\alpha m = p$ cambierebbe di segno nell' intervallo che passa fra s' ed s'', è certo che questo integrale, composto di elementi tutti positivi, non sarà mai nullo; e per conseguenza vi sarà sempre uno strisciamento fra le curve amb ed AmB.

42. Noi non ci fermeremo al caso particolarissimo in cui si suppone p costantemente nullo; perchè ciò esigerebbe che l'inviluppata e l' inviluppo si confondessero colle circonferenze O′ ed O. Se uno de' due centri C e C′ fosse situato fra α ed m, deve scorgersi, sulla *fig. 4* che i punti m_1, ed m' sarebbero situati l' uno a sinistra e l' altro a dritta di m; ma come allora uno degli archi mm_1, mm' sarebbe negativo, anche in questo

caso è la loro differenza analitica che darebbe la distanza fra i punti m_1 ed m', di maniera che l'integrale δ si applica parimente a questo caso. Finalmente, quando il ruotamento è interno, come nella *fig. 5*, questo integrale prenderà la forma

$$\delta'=\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\int_{s'}^{s''} pds;$$

ma poichè in questo caso i raggi R ed R' sono necessariamente disuguali, la differenza δ' degli archi percorsi dal punto di contatto sarà del pari differente da zero, e vi sarà sempre uno strisciamento fra l'inviluppo e l'inviluppata, semprecchè p non cangí di segno nell'intervallo che si considera.

Ritorniamo ora alla costruzioue grafica dei centri di curvatura di un inviluppo, prendendo per esempio i casi più usuali degli ingranaggi.

43. *Inviluppo di un punto mobile.* Se l'inviluppata si riduce ad un punto unico A situato sulla stessa circonferenza del cerchio mobile, l'inviluppo non sarà altro che la curva descritta da questo punto, vale a dire l'epicicloide semplice AMB: sarebbe l'epicicloide allungata A′ M′ B′, se il punto generatore fosse situato in A′ all'infuori del cerchio mobile; e se giacesse internamente in A″, darebbe luogo all'epicicloide raccorciata A″ M″ B″. Si è veduto precedentemente (n.[i] 3 e 5) quanto sia facile trovare i punti M, M′, M″ di queste curve, corrispondenti a ciascuna posizione del punto di contatto α del cerchio mobile O′; e che le normali corrispondenti sono le rette αM, αM′, αM″. Ora, per ottenere i centri di curvatura, fa mestieri secondo la regola del *n. 40*, elevare su ciascheduna normale una perpendicolare αD, αD′, o αD″, e prolungarla finchè tagli il diametro MO′: poscia, congiungendo il punto di sezione D, D′ o D″ col centro O mediante una retta, questa incontrerà il prolungamento della normale nel centro cercato C, C′ o C″. TAV. IV. FIG. IX.

44. Per l'epicicloide semplice AMB, vedesi chiaramente che, senza tracciare la perpendicolare αD, il punto d'incontro con MO′ sarà sempre all'estremità D di questo diametro; inol-

tre la serie dei centri di curvatura analoghi a C formerà una sviluppata ACE, la quale sarà essa stessa una nuova epicicloide che si può determinare direttamente nel modo che segue. Dopo di avere elevata la perpendicolare $C\beta$ sulla normale, si descriverà un cerchio che abbia per diametro l' intervallo $\alpha\beta$, ed un altro cerchio che abbia per raggio $O\beta$: poscia, facendo ruotare il primo sul secondo, il punto C genererà la sviluppata ACE.

Per giustificare questa assertiva, adottiamo le seguenti notazioni

$$O\alpha = R,\ O'\alpha = R',\ O\beta = r,\ \alpha\beta = 2r';$$

indi osserviamo che a cagione di $\alpha D = MT$ si ha evidentemente

$$O\beta : O\alpha :: \beta C : \alpha D :: \alpha\beta : \alpha T;$$

ciò che dà la proporzione

$$r : R = r' : R';\ \text{d' altronde } R = r + 2r',$$

donde si conchiude

$$r = \frac{R^2}{R + 2R'},\quad r' = \frac{RR'}{R + 2R'}.$$

Questi valori costanti provano già, che i due cerchi descritti con $O\beta$ ed $\alpha\beta$ resteranno invariabili di grandezza, qualunque sia la posizione del contatto α del cerchio primitivo O'; in allora dopo aver preso l' arco AF eguale alla mezza circonferenza $M\alpha D$, ed aver tracciato il raggio OEF, non rimarrà altro a fare, se non dimostrare che l' arco βC è eguale a βE. Or gli archi simili βC ed MT sono proporzionali ai loro raggi, e siccome il secondo di questi archi eguaglia $\alpha D = \alpha F$, si ha

$$\text{arco } \beta C = \frac{r'}{R'} \cdot \alpha F,\quad \text{arco } \beta E = \frac{r}{R} \cdot \alpha F,$$

da cui risulta che gli archi βC e βE sono effettivamente eguali in lunghezza assoluta, stante la proporzione fra i quattro raggi, non ha guari trovata.

45. Pel vertice B dell' epicicloide primitiva, il centro di curvatura è dunque all' origine E della sviluppata ACE; e siccome la regola generale del *n. 40* diviene insufficiente per ottenere questo centro particolare E, giova saperlo trovare direttamente. Ora il valore di r rapportato di sopra, mostra che descrivendo

sopra OB come diametro una mezza circonferenza, essa taglierà il cerchio primitivo del raggio OA in un punto G, tale che la perpendicolare GE darà il punto cercato E.

46. Decsi osservare che l' epicicloide è una curva rettificabile; perciocchè un arco di una sviluppata è sempre uguale alla differenza dei raggi di curvatura, che terminano alle sue estremità, e ne risulta che l' arco AC eguaglia la retta CαM. La metà ACE del ramo di questa curva avrà per lunghezza EB$=2r'+2R'$; e se si voglia esprimere mediante i soli elementi dell'epicicloide, basterà sostituire qui il valore di R' in funzione di r ed r'.

47. *Inviluppo di un cerchio*. Sia O il cerchio fisso, O' il cerchio mobile che ruotando sull'altro trascina con esso un piccolo cerchio *amb*, il cui centro M è posto sulla circonferenza O'. Questo punto M ha descritto l' epicicloide AM; e per ottenere l' inviluppo εm fa d' uopo, secondo la regola del *n. 35*, condurre da ciascun punto di contatto α una normale all' inviluppata *amb*, vale a dire menar la retta αM. Quest' ultima incontra l' inviluppata in due punti m ed m'; dunque vi saranno qui due inviluppi, uno interno εm, l'altro esterno $\varepsilon' m$, i quali toccheranno l' inviluppata *amb* nei punti m ed m'. Questi due inviluppi avranno gli stessi centri di curvatura C, e la stessa sviluppata ACE dell'epicicloide AM; ma i loro raggi di curvatura saranno tutti più piccoli o tutti più grandi che quelli di quest'ultima linea, della quantità costante M$m=r$; di maniera che queste tre curve saranno dappertutto equidistanti, dalla banda delle loro comuni normali. TAV. IV. FIG. X.

48. Ciascuno di questi inviluppi presenta una flessione nel sito in cui viene ad incontrare la sviluppata ACE. Per determinare il punto ε, basta osservare che allora il raggio di curvatura della epicicloide diviene eguale ad M$m=r$, e che la porzione di normale, dinotata da p al *n. 37*, è qui la corda αM del cerchio mobile; dunque se nella formola (A) di questo numero, si pone

$$\rho=r,\ \rho'=0,\ p=2R'\cos\varphi,$$

se ne dedurrà facilmente

$$p=\frac{r}{2}\left(\frac{R+2R'}{R+R'}\right).$$

Ciò mostra che prendendo sulla circonferenza O, a partire dal punto A, un arco eguale a quello che nel cerchio O′ ha per corda il valore che abbiam ritrovato per p, si otterrà il punto di contatto α', che corrisponde al punto di flesso contrario cercato ε; e quindi quest' ultimo punto si costruirà facilmente, come si è praticato pel punto C mediante α.

In vece di applicare la formola (A) all' epicicloide AM, si sarebbe potuto applicare direttamente all' inviluppo εm, il cui raggio di curvatura diviene nullo pel punto cercato ε; allora sarebbe stato mestieri porre

$$\rho = 0,\ \rho' = r,\ p + r = p' = 2R' \cos \varphi,$$

e sarebbesi trovato per p' che rappresenta la corda Mα, lo stesso valore di quello pocanzi ottenuto.

49. La sola parte di questi inviluppi, che sia utile nelle applicazioni agl' ingranaggi, è il ramo εm, o per parlare più esattamente è la porzione δm di questo ramo, che si trova alla parte esterna del cerchio O. Quantunque l' origine δ di questa parte utile differisca pochissimo dal flesso contrario ε, se si vuole determinare precisamente il primo di questi punti, si osserverà che esso presentasi quando il piccolo cerchio passa pel contatto α de' cerchi O ed O′, cioè quando la corda Mα si trova eguale al raggio Mm. Dunque basterà prendere l'arco Aδ eguale a quello che nel cerchio O′ ha per corda il raggio Mm.

TAV. IV. FIG. XI. 50. *Inviluppo di un raggio.* Se adottiamo per inviluppata il raggio O′A del cerchio mobile O′, l'inviluppo sarà l' epicicloide AmB generata dal punto A di un cerchio V, che sarebbe descritto sopra AO′ come diametro, e che girerebbe esso stesso sulla circonferenza O. Infatti, quando il cerchio O′ sarà giunto in una posizione qualunque O″, il raggio O′A occuperà una situazione O″a determinata dalla condizione $\alpha a = \alpha$A; se dunque abbassiamo su questa inviluppata O″a la perpendicolare αm, il punto m sarà (*n. 35*) un punto dell' inviluppo cercato. Ma questo punto m apparterrà evidentemente alla circonferenza V′ descritta sopra di αO″ come diametro, epperò gli archi αm

ed αa, che corrispondono ad uno stesso angolo $aO''\alpha$ e sono descritti con raggi doppi l'uno dell'altro, saranno eguali in grandezza assoluta; donde si deduce che l' arco αm eguaglia pure l' arco αA, e che siffattamente il punto m già trovato per l'inviluppo, appartiene effettivamente all' epicicloide AB che descriverebbe il punto A del cerchio V che ruoterebbe sulla circonferenza O.

51. Ciò che precede dimostra parimente che se il cerchio V ruotasse nell' interno del cerchio O′ divenuto immobile, il punto A di questa circonferenza V descriverebbe una epicicloide *rettilinea* che sarebbe precisamente il raggio AO′, o piuttosto il diametro intiero del cerchio O′, come l' abbiamo già veduto al *n. 7*. Di maniera che qui l'inviluppata e l' inviluppo sono generati dalla rotazione dello stesso cerchio V sulle circonferenze O ed O′; e questo risultamento è un caso particolare della proposizione seguente.

52. *Inviluppo di un' epicicloide.* Se si fa ruotare un cerchio U di raggio qualunque, dapprima dalla parte interna del cerchio O′, indi dalla esterna del cerchio O, uno stesso punto della circonferenza U descriverà così due epicicloidi *ab* ed AB, l' ultima delle quali sarà l' inviluppo di tutte le posizioni che prenderà l' inviluppata *ab*, quando verrà trasportata per la rotazione del cerchio O′ sulla circonferenza O. In effetto, prendiamo i cerchi O ed O′ in una posizione qualunque in cui si toccano in α, poscia tracciamo il cerchio U tangente agli altri due in questo stesso punto. Allora la circonferenza U taglierà l'epicicloide *ab* in un punto m tale che l' arco $\alpha m = \alpha a$; ma per effetto della rotazione del cerchio O′ su di O l'arco $\alpha a = \alpha A$; dunque gli archi αm ed αA sono eguali, e conseguentemente il punto m della curva *ab* appartiene anche all'epicicloide AB. Inoltre queste due epicicloidi si toccano fra loro nel punto comune m, poichè sì per l' una come per l' altra (*n. 4*) la normale è la corda αm del cerchio generatore U. Ma è rarissimo che si adoperino questi due profili curvilinei per denti delle ruote, TAV. IV. FIG. XII.

attesochè si trova molto più comodo adottare il sistema della *fig. XI* in cui uno de' due profili è una retta AO'.(*)

TAV. IV. FIG. XIII. 53. ***Inviluppo di una sviluppante del cerchio.*** Adottiamo finalmente per inviluppata la curva *amb*, ch'è la sviluppante (*n. 11*) di un cerchio concentrico con O', e descritto con un raggio arbitrario O'C'. Se dal punto α condurremo a questo cerchio O'C' la tangente αmC', questa sarà normale ad *amb*, e darà (35) un punto *m* dell' inviluppo cercato A*m*B; altronde il centro di curvatura C di questo inviluppo si otterrà (*n.40*) conducendo O'C' e la sua parallela OC, la quale risulterà perpendicolare alla normale C'αC, ed avrà evidentemente per valore *costante*

$$OC = O'C' \times \frac{R}{R'};$$

dal quale si conchiude che la circonferenza descritta col rag-

---

TAV. III. FIG. II. (*) Generalizzando queste osservazioni, si può definire diversamente da quel che abbiam fatto al *n. 32* la forma che devono avere i profili coniugati dei denti di un ingranaggio. Perciò prendiamo una curva qualunque W tangente in A (*fig. II*) a'due cerchi O ed O', e facciamola ruotare a vicenda nell' interno della circonferenza O' ed all' esterno dell'altra O; allora il punto A di W descriverà successivamente due curve *ab* ed AB che saranno i profili dimandati. Poichè quando i cerchi O ed O' gireranno intorno ai loro centri immobili, ed in maniera da imprimere velocità eguali (*n. 30*) alle circonferenze $\alpha\beta$ ed $\alpha'\beta'$, avverrà che le curve *ab* ed AB, generate come di sopra, si *toccheranno* costantemente in un punto variabile, rapporto al quale la normale comune passerà sempre pel punto A sulla linea dei centri. Giocchè si dimostrerà facilmente se si sostituisce, giusta il principio del *n. 33*, al movimento di rivoluzione de' cerchi O ed O' intorno ai loro centri immobili, il ruotamento della circonferenza O' sulla circonferenza O intieramente fissa.

Ma questa seconda definizione del profilo dei denti sarebbe con pena adoperata, nel caso che fosse assegnata innanzi ed *arbitrariamente* la forma *ab* di uno di questi profili; perchè allora bisognerebbe cominciar dal cercare qual sia la curva W, che rotando sopra O' potesse generare il profilo dato *ab*: ciò che spesso presenterebbe molte difficoltà.

gio OC sarà il luogo di tutti i centri di curvatura dell'inviluppo AmB; e conseguentemente questo inviluppo è esso stesso una sviluppante del cerchio OC.

54. Ritorniamo ora al vero stato di due ruote, delle quali l'una trasmette all'altra il movimento circolare da cui è animata; perchè, siccome abbiam detto al *n. 32*, l'ipotesi che il cerchio O' ruotasse sul cerchio O interamente fisso, non era che una supposizione propria a render semplice lo studio e il disegno degli inviluppi di cui avevamo mestieri. Sicchè in realtà, i centri O ed O' sono tutti due fissi, ed il movimento di rivoluzione ch' è impresso alla ruota O si comunica alla ruota O' mediante la spinta della curva AB sulla curva *ab*; ma affinchè questo movimento soddisfacesse alla condizione essenziale del *n. 30*, fa mestieri (*n. 32*) che una di queste curve sia l'inviluppo dell'altra la cui forma resta arbitraria. Malgrado ciò, bisogna porvi la restrizione, che nella porzione *ab* che sarà utilizzata, i raggi vettori, siccome O'*m*, vadano sempre decrescendo o sempre aumentando; epperò quelli di AB, come O*m*, varieranno costantemente nel verso contrario dei primi. Ciò è necessario affinchè vi sia effettivamente *spinta* di un dente sull'altro; perocchè se uno de' raggi vettori O'*m* fosse massimo o minimo, sarebbe necessariamente *normale* alla curva *ab*; or quando i due denti verrebbero a toccarsi in *m*, la normale O'*m* che deve allora (*n. 34*) passare pel punto di contatto D de' due cerchi, coinciderebbe in direzione colla linea dei centri ODO'; e quindi la rivoluzione del cerchio O intorno del suo centro immobile, produrrebbe una velocità precisamente *tangenziale* alla curva *amb*, ciocchè darebbe luogo ad un semplice attrito, il quale sarebbe incapace di trasportare la ruota O'. TAV. III. FIG. VII.

55. *Luogo de' contatti*. Nel movimento di rivoluzione intorno ai centri fissi O ed O', il punto di contatto *m* dell'inviluppo e della inviluppata, curve che partecipano tutte due a questo movimento, occupa successivamente posizioni differenti rispetto della retta invariabile ODO', e del punto D nel quale i cerchi mobili si toccano costantemente: l'insieme di queste posizioni del

punto m, sul piano fisso de' due cerchi, forma una curva che giova conoscere. In generale la si otterrebbe misurando su ciascuna posizione del cerchio mobile della *fig.II*, il raggio vettore A_2e_2, e l'angolo $e_2 A_2 O'_2$, per rapportarli in seguito sulla *fig.VII* a partire dal punto D considerato come polo; ma in parecchi casi, questo luogo de' contatti tra l' inviluppo e l'inviluppata si ottiene di una maniera diretta e semplicissima.

1.° Se l' inviluppata si riducesse ad un punto della circonferenza O', è evidente che questa circonferenza stessa sarebbe il luogo dimandato.

TAV. IV. FIG. XI. 2.° Quando l'inviluppata è il raggio O'A (*fig.XI*), il luogo dei contatti successivi è la circonferenza V descritta sopra O'A come diametro; poichè, qualunque sia la posizione O'A' del raggio mobile, la normale AN', che fa d'uopo abbassare dal punto A (*n. 35*) terminerà sempre sulla circonferenza V.

3.° Nel caso poco usato della (*fig.XII*), in cui l'inviluppo e l'inviluppata fossero due epicicloidi, i loro punti di contatto si troverebbero tutti manifestamente sulla circonferenza U, situata tangenzialmente a' due cerchi primitivi, sulla linea invariabile che congiunge i loro centri fissi.

TAV. IV. FIG. XIII. 4.° Finalmente quando l' inviluppata e l' inviluppo saranno due sviluppanti di cerchio, il luogo dei loro contatti successivi sarà precisamento la retta C'αC, tangente comune ai due cerchi ausiliarî che danno origine a queste sviluppanti; perciocchè durante la rivoluzione di queste curve intorno ai centri fissi O ed O', la normale che bisognerebbe condurre dal punto α (*n. 35*) coinciderebbe sempre colla retta C'αC.

56. *Limiti corrispondenti.* Siccome nella pratica si adoperano archi poco estesi dell' inviluppo e dell' inviluppata, importa di saper limitare una di queste curve alla porzione effettivamente utile, secondo la grandezza dell' arco conservato per l'altra. Ora i punti corrispondenti, cioè quelli che si troveranno in contatto ad una certa epoca del movimento di rivoluzione, sarebbero naturalmente dati se si costruisse l'inviluppo giusta il metodo del *n. 35* e la *fig.II*; ma nella maggior parte dei casi ordi-

nari si conosce precedentemente la natura dell'inviluppo e della inviluppata, e si tracciano queste curve indipendentemente l'una dall'altra; di maniera che si rende necessario di cercare in seguito i limiti corrispondenti, ciocchè è molto facile quando siasi costruito il *luogo dei contatti* successivi.

57. Per esempio nel caso della *fig. XI*, in cui l'inviluppata è il raggio O'A, e l'inviluppo l'epicicloide A*m*B descritta mediante la rotazione del cerchio V', per trovare il punto corrispondente ad N, si riporterà quest'ultimo in N' sulla circonferenza V ch'è il luogo de' contatti successivi, mediante un arco di cerchio descritto col centro O; poscia col centro O' e col raggio O' N' si descriverà un altro arco di cerchio, che trasporterà il punto N' in *n* sul raggio O'A; e quest'ultimo punto corrisponderà ad N. Di maniera che se non si conservi dell'inviluppo altro che l'arco AN, la sola porzione utile dell' inviluppata sarà A*n*; or questi archi avendo evidentemente lunghezze disugualissime, si scorge con chiarezza che vi sarà *strisciamento*, e per conseguenza *attrito* dell'inviluppo sull' inviluppata, como lo abbiamo dimostrato generalmente al *n: 41*. TAV. IV. FIG. XI.

58. Nella *fig. XIII* in cui l'inviluppo e l'inviluppata sono due sviluppanti, sappiamo che il luogo dei loro contatti successivi è la retta C'xC. Dunque per ottenere il punto corrispondente ad N, basterà trasportare quest'ultimo in N' mediante un arco descritto col raggio ON, e poscia riportare N' in *n* adoperando un arco di cerchio descritto col centro O'. Sicchè gli archi AN ed *an*, AB ed *ab*,... saranno gli archi corrispondenti, che ruotano e strisciano l'uno sull'altro durante la rivoluzione dei cerchi O ed O' intorno ai loro centri fissi.

CAPITOLO IV.

DELINEAZIONE DEGL' INGRANAGGI PIANI O CILINDRICI.

TAV. V. FIG. XIV.

59. Quando le due ruote che si vogliono mettere in movimento hanno gli *assi paralleli* proiettati in O ed O′ sul piano del nostro disegno, queste ruote, ed i *denti* che vi sono intagliati si compongono di sezioni cilindriche più o meno grosse, le cui generatrici sono parallele agli assi anzidetti: epperò questi denti si proietteranno secondo alcune curve o *profili*, che manifestamente basterà assegnare, acciocchè la forma intera della ruota sia ben definita. Faremo dunque astrazione dalle grossezze, e non ci dovremo occupare se non dei profili situati nel piano del disegno. Ciò premesso, secondo le nozioni preliminari sviluppate a' n.i 30 e 32, si sa che bisognerà cominciare dal dividere l' intervallo OO′ in due parti $OA=R$, $O'A=R'$, che siano in ragione inversa delle velocità *angolari* (*n. 29*) ω ed ω' che si vogliono imprimere alle due ruote: poscia con questi raggi si tracceranno i cerchi primitivi $\alpha\beta$ ed $\alpha'\beta'$, le cui circonferenze dovranno prendere *eguali* velocità assolute; vale a dire che archi eguali come AA′ ed aa' dovranno passare per la linea dei centri OO′ in uno stesso tempo.

60. Ora, scegliamo due numeri *interi* qualunque n ed n', che siano in ragione inversa delle velocità angolari ω ed ω', cioè tali che si abbia

$$n : n' :: \omega' : \omega :: R : R';$$

indi dividiamo il cerchio primitivo $\alpha\beta$ in n parti eguali AA′, A′A″, A″A‴,...ed il cerchio $\alpha'\beta'$ in n' parti eguali aa', $a'a''$, $a''a'''$,....Queste divisioni avranno anche la stessa lunghezza assoluta nei due cerchi; perchè secondo la proporzione precedente, si ha evidentemente

$$\frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'}, \text{ o sia } AA' = aa';$$

in guisa che, con la rivoluzione dei due cerchi, i punti A′ ed

a', A'' ed a'',. . . . giungeranno nello stesso tempo sulla linea dei centri OO'. Indi suddivideremo ciascuna *divisione* precedente in due parti diseguali, prendendo gli archi AB, A' B', A''B''. . . . eguali fra di loro, ma alquanto minori della metà di AA'; questi archi parziali formeranno la *base* di ciascun dente o il *pieno* della ruota, mentre che gli archi AB', A' B'',. . . formeranno il *vuoto* o *l' intervallo* fra due denti consecutivi. Si praticherà lo stesso sul cerchio primitivo $\alpha'\beta'$, in cui ab, $a'b'$,. . . saranno le basi dei denti di questa ruota, un poco più piccole che gl' intervalli ba', $b'a''$,. . . . Questa differenza è necessaria pel *giuoco* che dee esister sempre negl'ingranaggi, come lo dimostreremo più in là (*n. 66*).

61. Se si voglia valutare l' ampiezza di questo *giuoco* con precisione, chiamiamo B e B' le basi AB ed ab che possono essere disuguali, I ed I' gl'intervalli, ed avremo

$$B+I=\frac{2\pi R}{n}=\frac{2\pi R'}{n'}=B'+I';$$

da cui si deduce pel giuoco

$$J=I-B'=I'-B=\frac{2\pi R}{n}-(B+B'),$$

vale a dire *la lunghezza comune delle divisioni meno la somma delle basi*. Se le basi sono eguali sulle due ruote, l'ampiezza del giuoco sarà l'eccesso di un intervallo sopra una base; ma in tutti i casi bisogna che questo giuoco sia compreso fra *un dodicesimo* ed *un ventesimo* della lunghezza costante AA' delle divisioni primitive, ad oggetto di non diminuir troppo la *spessezza* dei denti, e conseguentemente la resistenza di cui son capaci; ed anche per render meno sensibili gli urti alternativi, che si manifestano sovente quando le due ruote, continuando a camminare nello stesso verso, soffrono qualche variazione nelle loro velocità prodotte da cagioni accidentali.

Tutti i particolari che precedono sono comuni ai differenti generi d'ingranaggio, i quali non differiscono fra di loro se non per la forma del profilo dei denti; ma in tutti i casi, per adempiere la condizione essenziale (*n. 30*) che archi eguali, come

AA' ed *aa'* passino nello stesso tempo per la linea dei centri, bisognerà ricordarsi che i profili corrispondenti ZAF e *zaf* devono essere, uno per rispetto all'altro, *inviluppo* ed *inviluppata* (*n. 32*), e che si può scegliere ad arbitrio uno di questi due profili, soddisfacendo però alla restrizione indicata al *n. 54*.

62. INGRANAGGIO A FIANCHI, *simmetrico* e *reciproco*. Qui adotteremo per profilo di ciascun dente della ruota O' un raggio siccome O'*a*; ed allora il profilo corrispondente AZ sulla ruota O, dovrà essere un arco della epicicloide generata dal punto *a* del cerchio V' descritto sul diametro O*a*', il quale ruoterebbe sulla circonferenza O; perchè si è veduto (*n. 50*) che siffatta epicicloide era *l'inviluppo* di tutte le posizioni che prende il raggio O'*a* durante la rotazione del cerchio O'. Si traccerà dunque quest' arco AZ col metodo del *n. 3*, o con quello del *n. 4*, e si farà terminare al punto Z, ove taglierà il raggio OZ condotto dal mezzo della base AB: quindi si trasporterà questo risultamento simmetrico a sinistra del raggio OZ, per ottenere il profilo opposto BZ; perchè qui l'ingranaggio è *simmetrico*, cioè destinato a girare egualmente da dritta a sinistra come da sinistra a dritta; mentre che se la ruota O non dovesse agire (*mener*) che nel secondo verso, la forma del profilo BZ resterebbe arbitraria (*).

63. Si dà nome di *fianco* alla parte piana del dente, diretta secondo il raggio O'*a*; e siccome non vi è che una piccola porzione di questo raggio che sia toccata e condotta dall' arco epicicloidale AZ, così giova saper trovare l' estensione precisa *af* che dee avere il fianco. Ora, per ciò che abbiam detto al *n. 57*, fa d' uopo descrivere con la distanza OZ per raggio un arco di

(*) Ad evitare ogni equivoco, e non cadere in gravi contraddizioni circa *il senso* di vari movimenti di rotazione intorno ad assi diversi, bisogna osservar ciascuno di essi ponendosi sopra l' asse corrispondente. Così nella *fig. 14*, se il sistema agisce nella direzione indicata dalla freccia φ converrà dire che la ruota O gira da *sinistra a dritta*, e la ruota O' *da dritta a sinistra*.

cerchio che trasporterà l'estremità Z in *m* sulla circonferenza V'; poscia riportare questo punto *m* in *f* mediante un arco di cerchio descritto col centro O'.

64. Ordinariamente si rende *reciproco* questo ingranaggio prolungando il profilo ZA nell'interno della ruota O con un fianco AF, ed aggiungendo all'esterno della ruota O' un dente saliente *azb*, il cui profilo è formato da due archi di epicicloide, simmetrici l'uno dell'altro. Qui l'arco *az* si traccerà facendo ruotare sulla circonferenza O' il cerchio V descritto sopra AO come diametro; e l'estensione precisa del fianco che sarà condotto dall'arco *az*, si otterrà (*n.57*) descrivendo dal punto O' l'arco di cerchio zM terminato alla circonferenza V, e poscia riportando il punto M in F mediante un arco concentrico con O.

Quando una volta si è tracciato il profilo FAZBE sopra un cartone che s'intaglia lungo questo contorno, un tal cartone forma una sagoma mobile che si trasporta sulle altre basi A'B', A''B'',...e mediante la quale si tracciano immediatamente i profili di tutti i denti della ruota O. Si opera nello stesso modo per rispetto della ruota O', adoperando una sagoma mobile intagliata secondo il contorno *fazbe*.

65. *Limite degl' incastri*, o *curva di raccordamento fra due profili*. In seguito dei fianchi AF e BE fa mestieri praticare un incastro, che permetta al dente *azb* di muoversi liberamente. Per determinarne i limiti precisi consideriamo la *fig.15*, in cui il *giuoco* dell'ingranaggio *è supposto nullo*, e dove in questo caso il dente *azb* sta necessariamente in contatto co'due profili *ZAF* e Z'B'E' nello stesso tempo; allora si tratterà di cercare il luogo FGE' di tutte le posizioni, che prende il punto *z* sul cerchio O mobile intorno al suo centro, mentre il cerchio O' gira esso stesso, e trascina il raggio O'*z* intorno del punto fisso O'. Ora, dalle considerazioni esposte al *n. 33*, questa curva FGE' è la stessa di quella che sarebbe descritta dal punto *z*, nell'ipotesi in cui il cerchio O' ruotasse sul cerchio O perfettamente immobile: ma questa specie di rotazione produce una epicicloide allungata della quale abbiam dato la costruzione al *n. 5*; dunque farà TAV. V. FIG. XV.

mestieri prendere una porzione del *nodo* di questa epicicloide per il contorno FzE′, e quest'arco si raccorderà perfettamente con i due fianchi AF e BE′. In fatti, se si considera (*fig. 16*) il dente *azb* pervenuto nella posizione in cui va a cessare di essere in azione, e dove l'estremità del fianco AF è toccata dall'ultimo elemento dell' arco *az*, allora la normale comune a questa inviluppata ed a questo inviluppo è la retta FD (*n. 34*); ma considerando il punto *z* come avendo descritto nello stesso tempo l' epicicloide allungata E′GF, la retta FD sarà ancora (*n. 2*) normale a quest' ultima curva; dunque si conchiude che l'epicicloide E′GF è precisamente tangente al fianco AF, e che similmente tocca l' altro fianco B′E′ nel punto E′.

66. Si assume in ciò che abbiamo esposto che la base *ab* di ciascun dente sia eguale precisamente all' intervallo AB′; ma questa ipotesi non dee mai essere ammessa nella pratica, perocchè ne risulterebbe, su ciascuna faccia *bz* dei denti in azione, un contatto inutile per la spinta, e per conseguenza un attrito che diminuirebbe notabilmente l' effetto utile della forza motrice: inoltre la menoma irregolarità nei profili fermerebbe il movimento della macchina, o esporrebbe i denti a rompersi. Giova dunque ammettere un certo *giuoco*, del quale abbiamo indicato i limiti al *n. 61*; ed in questo caso, ch' è quello della *fig. 14*, l' epicicloide FG non andrà più a raggiungere il fianco B′E′, e farà d' uopo farla terminare al suo vertice G situato sulla circonferenza descritta col raggio OL, che si trova prendendo O′L = O′*z*; poscia, siccome bisogna provvedere al caso in cui una causa accidentale venendo a rallentare la velocità di rotazione della ruota *spingente* (*menante*), avverrebbe che il profilo *faz* camminerebbe a vuoto, mentre che la spinta si eserciterebbe fra le facce *ebz* e Z′ B′ E′, si dovrà tracciare ancora l' epicicloide allungata E′H′ simmetrica di FG (*); e l' assieme di questi due

(*) Questi due archi FG ed E′H′ non appartengono alla stessa epicicloide allungata; poichè per ottenere il vertice G della prima, bisognerebbe portare sulla circonferenza $\alpha\beta$, a partire dal punto A, un arco eguale alla

rami riuniti con un piccolo arco della circonferenza di raggio OL, comporrà il contorno FGH'E' dell'incastro rigorosamente necessario, perchè la punta *z* si muova liberamente sia nelle piccole vacillazioni che permette il *giuoco*, sia nel caso che la ruota O dovesse spingere tanto a sinistra quanto a drittà.

Si determinerà nello stesso modo il contorno *ehg'f'* dell'incastro che dee praticarsi nella ruota O', per lasciar libero il passaggio al dente A' Z' B', facendolo terminare secondo due rami di epicicloidi allungate, descritte dall'estremità del raggio OZ', trasportato nel ruotamento del cerchio O sul cerchio O'; e questi due rami si raccorderanno con un piccolo arco della circonferenza il cui raggio sarà O'*l*, il quale si determina prendendo la distanza O*l*=OZ'.

67. In vece di attenersi a questi limiti rigorosi, giova sempre, nella pratica, scavare l'incastro un poco più profondo; e per rendere facili le maniere di esecuzione, ordinariamente si sogliono prolungare i fianchi fino alla circonferenza OL, il cui raggio si trova prendendo O' L = O'*z*, in guisachè l'incastro termina in forma quadrata, come si vede in $F''G_2H_2E''$. Inoltre, siccome le parti acute ed i spigoli vivi espongono a controspinte, o logorano le superficie su le quali strisciano sotto lo sforzo di una grande pressione, ciò che altera la curvatura primitiva dei profili ed aumenta gli attriti, si suol sopprimere la porzione di ciascun dente che avvicina la punta Z, come si vede in B_4XYA_4, avendo cura di rotondare lo spigolo vivo che risulterebbe da questa troncatura eseguita mediante un cerchio concentrico con O. I denti diconsi allora *scantonati* (échanfrinés), ed operando istessamente sulla ruota O', si potrà dare agl' incastri delle due ruote una profondità alquanto minore che non l'indicano le circonferenze OL ed O'*l*. TAV. V. FIG. XIV.

metà *ak* di *ab*; poscia tirare il raggio O*k'* il quale taglierebbe la circonferenza OL nel punto dimandato G. Mentre che per l'altra epicicloide E'H', bisognerà portare l'arco *b*K sul cerchio $\alpha\beta$, ma a partire dal punto B', facendo *giuocare* le due ruote per mettere in contatto il profilo *bz* con l'origine B' del fianco B'E'.

68. Per fissare convenientemente il raggio del cerchio XY che determina lo *scantonamento*, fa d'uopo soddisfare alla seguente condizione: *quando due denti si toccano in* A *sulla linea dei centri* OAO', *debbono esservi*, *dopo questa linea*, *e nella direzione del movimento*, *un' altra coppia di denti* Z' e z' *che siano anche in azione nello stesso tempo*. Or siccome l' epicicloide A' Z' tocca il fianco *a'f'* in un punto *x*, il quale si trova abbassando dal punto A una perpendicolare A*x* su questo fianco (*n. 34*), basterà condurre questa normale, e prendere la distanza O*x* per raggio del cerchio XY.

Se avvenisse che la normale A*x* abbassata sul fianco *a'f'* andasse a cadere al di sopra del punto *f'*, ciò dinoterebbe che i denti sono troppo discosti per adempiere la condizione enunziata di sopra; ed allora bisognerebbe aumentare i numeri *n* ed *n'* diminuendo la grandezza delle divisioni eguali AA' ed *aa'*. Ritorneremo su questa circostanza nel n° *103*.

69. *Metodo approssimativo*. Dalla condizione precedente si è dedotto un metodo semplicissimo, ma la cui esattezza non è che approssimativa, il quale consiste a surrogare il profilo epicicloidale A'Z' con un arco di cerchio che passa pel punto *x* indicato di sopra, e che tocca in A' il fianco rettilineo A'F'O: sarà molto facile trovare il centro di quest' arco circolare che dovrà terminare in *x*, scantonando il dente come precedentemente. Questa maniera, che dee esser proscritta quando si tratta di una macchina che ha mestieri di qualche precisione, può essere adoperato in una macchina di forza i cui movimenti son regolati da *volanti*; particolarmente quando i denti della ruota sono abbastanza vicini perchè le porzioni di profilo B_4X, A_4Y, che restano dopo lo scantonamento, non oltrepassino quattro o cinque centimetri.

70. Ed anche quando un disegno ha per oggetto, non di servire all'esecuzione di una macchina nelle sue vere dimensioni, ma solamente di far conoscere la disposizione delle sue diverse parti, si sogliono configurare i denti descrivendo un cerchio che abbia per centro il mezzo ω dell' arco B_7 A_8, e per

raggio una delle due distanze eguali ωB_7, ωA_8; allora questo cerchio somministra in un sol tratto i due profili opposti B_7X_7, ed A_8Y_8 con un' approssimazione sufficiente per l' indicazione che si è avuto di mira.

71. Nel nostro disegno la piccola ruota O′ è supposta piena, e si chiama *rocchetto*. La ruota grande O è vuotata a fine di renderla più leggiera: N rappresenta *la gaviglia* ch' è legata mediante le traverse (croisillons) P, P′.... col *mozzo*; questo è proiettato fra i due cerchi OQ ed OS, l'ultimo dei quali indica il vuoto destinato a ricevere l'*albero* della ruota; e quest'albero si fissa sul mozzo per mezzo di due *chiavi* che s'introducono negl'incastri T e T′. Finalmente W è una *ghiera* o anello di ferro che circonda l'estremo saliente del mozzo per fortificarlo ed impedire che si spezzi.

72. *Osservazione*. Se dopo aver costruito questo ingranaggio si avesse bisogno di cambiare il rapporto delle velocità angolari, e si volesse lasciare intatta la ruota O, sostituendo solamente ad O′ una nuova ruota O″ di un raggio differente, si sa (*n*. 32) che bisognerebbe adottare per profilo di ciascun dente di O″ l' inviluppo dello spazio, che sarebbe percorso dal contorno ZAF nella ipotesi in cui il cerchio O ruoterebbe sulla circonferenza O″. Or siccome la porzione ZA di questo contorno è di già un' epicicloide generata dal ruotamento del cerchio V′ sopra O, si è veduto (*n*. 52) che il suo inviluppo era un'altra epicicloide prodotta dallo stesso cerchio V′ ruotando nell'interno della circonferenza O″: questa epicicloide interiore surrogherà dunque il fianco *af*; ed inquanto alla parte del raggio AF, il suo inviluppo sarà ancora (*n*. 50) una epicicloide generata dal ruotamento del cerchio V sulla circonferenza O″. Sicchè il dente di questa nuova ruota non avrebbe *fianco rettilineo*, ed il suo intero profilo si comporrebbe di due archi appartenenti all' epicicloidi prodotte dai cerchi V′ e V, che ruoterebbero all' interno ed all'esterno del cerchio O″: la traccia sarebbe dunque meno semplice dell'ordinaria, ma offrirebbe il vantaggio di far servire la ruota O già costruita.

TAV. VI. FIG. XVII. 73. Ingranaggio con fianchi, *simmetrico ma non reciproco.* La ruota grande O potrebbe sola portare dei denti propriamente detti, vale a dire delle sporgenze al di fuori del cerchio primitivo $\alpha\beta$, mentre che il rocchetto non avrebbe che i fianchi *af*, *be*, diretti secondo i raggi nello interno del cerchio primitivo $\alpha'\beta'$. L' estensione di questi fianchi si otterrà come al *n. 63* riportando il punto Z in *m* sulla circonferenza V′ mediante un arco descritto col centro O, e poscia descrivendo col centro O′ l'arco di cerchio *mfe*; in seguito si prolungheranno questi fianchi per formare un incastro terminato in forma quadrata alla circonferenza O′*g*, il cui raggio dee essere al massimo eguale alla differenza delle distanze OO′ ed OZ (*n. 67*). In quanto alla ruota O, essa non avrebbe a rigore nè fianchi, nè incastri; ma siccome è della prudenza di lasciare un poco di giuoco per evitare gli attriti che produrrebbe uno spostamento accidentale, s'intaglierà questa ruota nel verso de' raggi fino ad una profondità di uno o due centimetri, indicata dal cerchio GH.

74. Qui la ruota è quella che dee *spingere* il rocchetto. In effetto, si scorge chiaramente che l' epicicloide AZ comincia a toccare il fianco *af* nel punto *a*, quando questo fianco coincide colla linea dei centri OO′, e che dopo questa linea, lungo la direzione del movimento, il contatto *x* col raggio O′*a*′ si avvicina al centro O′; dunque a sinistra di OO′, il profilo A_2 Z_2 non avrà alcun punto comune col fianco O′a_2, il quale non sarebbe toccato che dal ramo di epicicloide simmetrico di A_2 Z_2. Risulta da ciò che quando la ruota conduce il rocchetto, i denti non sono mai in *azione* se non *dopo la linea dei centri* OO′, nel verso donde ha luogo il movimento: ciò che offre un vantaggio importante nella pratica, come spiegheremo al *n. 99*. Nella *fig. 14* eravi spinta prima e dopo la linea dei centri, atteso che la piccola ruota era essa stessa fornita di denti, sporgenti fuori del cerchio primitivo $\alpha'\beta'$.

TAV. VI. FIG. XVIII. 75. Dentiera *mossa da una ruota dentata.* Se nell' ingranaggio precedente si supponga che la ruota O′ acquisti un raggio infinito, il cerchio primitivo $\alpha'\beta'$ si cambierà in una retta tan-

gente alla circonferenza $\alpha\beta$ della ruota O; e la rotazione di questa imprimerà un movimento rettilineo alla spranga dritta XY, chiamata *dentiera*, la quale è mantenuta in questa direzione mediante alcuno *scanalature* o *guide*. Qui, senza tener conto del rapporto delle velocità angolari, una delle quali è zero, farà d'uopo dividere la circonferenza $\alpha\beta$ in un certo numero di parti eguali AA', A'A'',... indi, portare la lunghezza rettificata di una di queste divisioni secondo aa', $a'a''$,...

Il profilo AZ del dente della ruota dovrà essere una *sviluppante* del cerchio, generata dal ruotamento della retta $\alpha'\beta'$ sulla circonferenza $\alpha\beta$; perchè questa retta è ciò che diviene in questo caso il cerchio V' della *fig. 17*, il quale aveva per diametro il raggio del cerchio O', ch' è infinito nel caso attuale. Per la stessa ragione i fianchi della dentiera saranno le rette ag, bh,... perpendicolari ad $\alpha'\beta'$, e si prolungheranno fino ad una retta ghg' parallela ad $\alpha'\beta'$, e condotta ad una distanza Og eguale almeno ad OZ: o meglio, queste rette ag, bh,... non servono che a formare gl' incastri necessarì pel libero passaggio dei denti, perchè quì i fianchi della dentiera si riducono ad *un punto unico*.

Infatti, la tangente $\alpha'\beta'$ essendo normale (*n. 11*) a tutte le sviluppanti AZ, A' Z', A''Z'',.... è precisamente ne' punti a, a', a'',.... che avranno luogo i contatti di questi profili con i fianchi ag, $a'g'$, $a''g''$,.... D' altronde la ruota O non avrebbe bisogno d' incastri, rigorosamente parlando, poichè le facce ab, $a'b'$,... sono tangenti alla circonferenza $\alpha\beta$; ma siccome giova sempre evitare gli attriti, s'intaglierà la ruota secondo il contorno AGH'B', fino alla profondità di un centimetro circa. Qui i denti non saranno in azione se non dopo la linea dei centri.

76. Si può ancora guarnire la dentiera di denti sporgenti azb, $a'z'b'$,... i quali condurranno i fianchi AF, A' F', tagliati nell' interno della ruota secondo i suoi raggi; e poichè il cerchio V, descritto sopra AO come diametro, è quello il quale ruotando sulla circonferenza $\alpha\beta$ produrrebbe l' epicicloide rettilinea AF, è anche questo stesso cerchio V che bisognerà far ruotare sulla retta $\alpha'\beta'$ per ottenere l' inviluppo az (*n. 51*): que- TAV. VI. FIG. XIX.

st' ultima curva sarà dunque una cicloide ordinaria, che si costruirà come al *n. 10*. Per fissare l' estensione precisa del fianco AF, il quale sarà toccato dall' arco az, si praticherà come nella figura 14, di cui questa è un caso particolare, trasportando il punto z in M sulla circonferenza V, mediante una parallela $\alpha'\beta'$ (*n. 64*), poscia si descriverà col centro O l' arco di cerchio MEF, e finalmente si prolungherà il fianco AF fino alla circonferenza GH'G' descritta con un raggio OG determinato dalla parallela MGz; perchè questo limite rigoroso sarà sufficiente nella pratica, attesochè farà mestieri scantonare i denti della dentiera, per evitare le controspinte che produrrebbero i denti impegnati avanti la linea dei centri: come si dirà nel *n.* (*101*).

77. Un' altra combinazione la quale sarebbe anche ammessibile, consisterebbe in sopprimere i denti dalla ruota lasciandole i soli fianchi, mentre che la dentiera non avrebbe affatto fianchi e porterebbe essa sola de' denti cicloidali; ma ci sembra superfluo di tracciare qui un'altra figura per questo caso particolare.

TAV. VI. FIG. XX. 78. Ingranaggio a fianchi, *interiore*. Quando il cerchio più piccolo $O'\alpha'\beta'$ deve esser situato nell'interno del grande $O\alpha\beta$ la migliore disposizione consiste a mettere i fianchi af, be, $a'f'$,.. sulla piccola ruota, ed a guarnire co' denti AZB, A'Z'B',.... la più grande. Il profilo AZ è allora un'epicicloide interiore (*n. 6*) descritta dal cerchio V' che ruota al di dentro della circonferenza $\alpha\beta$; e l' estensione precisa del fianco af si otterrà ancora descrivendo col centro O l'arco Zm, poscia col centro O' l'arco mf. Inquanto alla profondità dell' incastro, dovrà estendersi fino alla circonferenza ghg' il cui raggio sarà determinato dal cerchio mZ. La ruota *spingente* dovrà esser quella che porta i denti, per le ragioni già addotte al *n. 74*, affinchè la spinta si eserciti dopo la linea dei centri.

TAV. VI. FIG. XXI. 79. Se al contrario, si volesse guarnir di denti la piccola ruota $O'\alpha'\beta'$, e porre i fianchi sulla ruota grande $\alpha\beta$, il cui centro è fittiziamente rappresentato con O (perocchè esso casca effettivamente fuori dei limiti della *fig. 21*), bisognerebbe per tracciare il profilo az descrivere un cerchio VSA, il cui raggio VA sarebbe

la metà di OA, e far ruotare questo cerchio V sulla circonferenza $\alpha'\beta'$ ch' esso inviluppa, ciocchè somministrerebbe una epicicloide del genere di quelle che abbiamo considerato nel *n. 9*. Rispetto al fianco FAG, dovrebbe dapprima estendersi da A in G fino alla circonferenza GH'G' descritta col raggio $OO' + O'z$, ad oggetto di lasciare un libero passaggio al dente *azb*; indi dovrebbe prolungarsi verso il centro da A in F, per ricevere la spiuta del profilo *az*. In effetto, se giusta la regola generale del *n. 57*, si vuol trovare quale sia il punto dell' inviluppata AO che verrà in contatto col punto *z* dell' inviluppo *az*, farà mestieri trasportare il punto *z* in M sulla circonferenza V, mediante un arco *z*M descritto col centro O', e poscia ricondurre il punto *M* in *F* mediante un arco *MEF* descritto col centro O. Sicche AF, A_2F_2,.. saranno le sole porzioni de' fianchi, sulle quali si eserciterà la spinta dei denti; e mentrechè il contatto x si avanzerà da a_2 verso z_2 sulla ruota piccola, sulla grande camminerà per coutrario da A_2 verso F_2; in guisa che il cammino totale percorso da questo *contatto* essendo più grande che nell' altro caso, l'attrito aumenterà considerevolmente.

Ma vi è ancora un altro inconveniente assai grave, risultante dall' incastro che fa d' uopo praticare nella piccola ruota per permettere al fianco AF di girare liberamente. Perchè, durante la rivoluzione dei due cerchi O ed O' intorno dei loro centri immobili, la curva percorsa dal punto F sul piccolo cerchio mobile è la stessa (*n.33*) di quella che esso descriverebbe sul piano fisso di questo cerchio, se si facesse ruotare la circonferenza $\alpha\beta$ sopra $\alpha'\beta'$; dunque questa curva è un'epicicloide a nodo $\theta\lambda F\mu z$ che verrebbe a raccordare in *z* il profilo *az*, come lo abbiamo dimostrato in un caso simile nel *n. 65*. Per conseguenza bisognerà vuotare la ruota O' secondo il contorno $F\lambda\theta$, il quale toglierà una piccola porzione del profilo *az*; donde risulterà che il dente *azb* non comincerà ad essere in azione che un poco dopo la linea de' centri. Ma ciò ch' è molto più serio è che la base del dente si troverà talmente indebolita da questo incastro, che non offrirà più sufficiente resistenza; e conseguentemente il

sistema d'ingranaggio rappresentato dalla *fig. 21* dee esser proscritto nella pratica.

80. *L'ingranaggio interno non può essere reciproco*; vale a dire ch'è impossibile di dare a ciascuna ruota denti e fianchi nello stesso tempo. In effetto, se si soprappongono le *fig. 20* e *21* di maniera a far coincidere i due raggi dinotati con $O'a$, si vedrà tosto che il profilo AZ sarà coverto dal fianco AF, e che bisognerebbe distruggere quest'ultimo per potere eseguire l'altro: parimenti nella ruota O', il fianco af non può coesistere con l'incastro $a\lambda F$.

TAV. VI. FIG. XXII. 81. INGRANAGGIO A LANTERNA. Si dinota con quest'ultimo nome una specie di tamburo composto di due dischi (*tourteaux*) eguali, paralleli, ed uniti mediante vari cilindri retti chiamati *fusi*, le cui basi sono i cerchi c, c', c''; i centri di questi piccoli cerchi sono situati tutti sopra una circonferenza $\alpha'\beta'$, che forma il *cerchio primitivo* di questa specie di ruota, e la *fig.22* rappresenta un taglio fatto fra i due dischi da un piano ad essi parallelo; perciò i cerchi $c, c', c'',$... sono tratteggiati. Questa lanterna è posta in movimento da una ruota O il cui *cerchio primitivo* è $\alpha\beta$; i denti di questa sono ordinariamente tagliati separatamente, e quindi commessi col corpo della ruota: allora si denominano (*alluchons*), i quali si costruiscono in legno assai duro, mentre che i fusi, i quali si consumano più presto a cagione dell'attrito, sono qualche volta di ferro di fusione. Questa specie d'ingranaggio si adopera nelle macchine assai forti, in cui non vi è mestieri di gran precisione ne' movimenti; perchè non offre quel movimento dolce, e quella regolarità dell'ingranaggio con fianchi.

Dopo avere scelti (*n. 60*) due numeri interi n, n', che stiano fra di loro come i raggi delle circonferenze $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, si dividerà la prima in n parti eguali AA', A'A'',... la seconda in n' parti eguali aa', $a'a''$,...; da cui risulterà ancora $AA'=aa'$: si segnerà la base del denti AB, A'B',...eguale, tutto al più, alla metà di una divisione AA'; poscia prendendo un arco ac più piccolo del quarto della divisione aa', si adoprerà la corda di questo

arco per descrivere tutti i cerchi c, c', c'',...che saranno le basi dei fusi. Ciò fatto, siccome il profilo AZ dev'essere l'inviluppo (*n. 32*) dello spazio, che sarebbe percorso dal cerchio c nell'ipotesi in cui la circonferenza $\alpha'\beta'$ ruotarebbe sopra $\alpha\beta$ immobile, si osserverà primieramente che il punto c descriverebbe allora un' epicicloide cl facile a costruirsi (*n. 3*); se dunque da diversi punti di questa epicicloide, e con un raggio costantemente uguale alla corda ca, si descrivano parecchi archi di cerchio, basterà tracciare una curva AZλ che sia ad essi tangente, per ottenere il profilo dimandato con un metodo più spedito della costruzione per punti indicata nel *n. 47*.

82. Questo ramo AZλ dell' inviluppo del piccolo cerchio c, si prolungherebbe dalla parte interna della circonferenza $\alpha\beta$ fino ad un punto di regresso, rappresentato da ε' nella *fig. 10* della *Tav. IV*; e siccome nell' istante in cui l' inviluppata toccherebbe l'inviluppo in questo punto ε', l'asse c del fuso avrebbe già oltrepassato la linea dei centri OO', nulla si opporrebbe acciocchè si conservasse questo prolungamento di AZλ: ma per maggior facilità nella pratica si termina questo profilo al punto δ', che corrisponde ad A sulla *fig. 22*, e per lo quale il contatto ha luogo quando questo punto A è pervenuto sulla retta OO'(*n. 49*). Laonde nell'ingranaggio a lanterna, i denti non saranno mai in azione avanti la linea dei centri.

83. Quanto all'incastro necessario affinchè i fusi si muovano liberamente, gli si potrebbe assegnare per contorno il mezzo cerchio descritto sulla corda dell'arco AB' come diametro; ma d'ordinario si è contento di tracciare la porzione di raggio AG un poco più grande della corda ac, e di descrivere col centro O l'arco di cerchio GH' terminato ancora nel raggio B'H'. È vero che la retta AG non è rigorosamente tangente al profilo AZ, poichè la normale comune a questa curva ed all' epicicloide cl sarebbe la corda ac (*n. 47*), ma lo spigolo saliente che ne risulterà in A sarà ottusissimo, e d' altronde si potrà raddolcire, salvo che il dente non si porrà in azione che un poco più tardi.

84. Giova scantonare i denti, ma senza fare a meno di adem-

piere la condizione del *n. 68*, affinchè il movimento si continui senza urti (*à-coups*). Perciò si tirerà la retta Ac' ch' essendo normale (*n.47*) all' inviluppata c' a' b' e all' inviluppo A'Z', determinerà il loro punto di contatto x : ed allora basterà prendere un raggio un poco più grande che Ox, per descrivere la circonferenza dalla quale comincerà lo scantonamento. Se questa normale Ac' fornisse un punto x che fosse al di sopra della sezione Z' de' due profili simmetrici, i fusi sarebbero troppo lontani per adempiere la condizione del *n. 68*; ed in questo caso bisognerebbe aumentare il numero n' facendo anche variare il numero n dei denti della ruota, di maniera che il rapporto dei numeri n ed n' restasse sempre lo stesso di quello dei raggi R ed R' dei cerchi primitivi $\alpha\beta$ ed $\alpha'\beta'$.

TAV. VI. FIG. XXIII. 85. Dentiera a fusi. Quando il raggio R' diviene infinito, il cerchio primitivo $\alpha'\beta'$ si riduce ad una retta, e la lanterna diviene una dentiera XY. In questo caso, la curva cl descritta dalla retta $\alpha'\beta'$ ruotante sopra $\alpha\beta$ essendo una sviluppante del cerchio, la curva equidistante AZ sarà parimente una sviluppante di $\alpha\beta$ generata dal punto a ; di maniera che si può tracciare immediatamente quest' ultima, senza ricorrere a cl. L' incastro AGH'B' si eseguirà come di sopra; e qui la normale Ac' coincidendo sempre con $\alpha'\beta'$, i punti di contatto x di tutti i profili dei denti saranno costantemente sulla linea $\alpha'\beta'$; dunque per iscantonare i denti, basterà tracciare una circonferenza con un raggio alquanto più grande di Ox.

TAV. VI. FIG. XXII. 86. Dentiera *con una* lanterna. Se nella *fig. 22* si supponesse al contrario il raggio R infinito, la ruota O diverrebbe una dentiera con denti che condurrebbero la lanterna O'. In questo caso, la curva cl sarebbe una *cicloide* ordinaria descritta dal punto c del cerchio $\alpha'\beta'$, il quale ruoterebbe sulla linea $\alpha\beta$ divenuta retta; ed il profilo AZ dovendo essere una curva equidistante da questa cicloide, si costruirebbe mediante alcuni archi di cerchio come al *n. 81*.

TAV. VII. FIG. XXIV. 87. Ingranaggio a sviluppante. Dopo aver determinato, come al *n. 60*, le divisioni eguali AA', aa', del pari che le basi dei

denti AB, ab, su' cerchi primitivi $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, i cui raggi sono rappresentati da R , R', si traccerà pel punto A una retta TAT' facente un angolo arbitrario con la linea OAO'; e co' centri O,O' si descriveranno due nuovi cerchi CD , C' D' tangenti a questa retta TAT': i raggi di questi cerchi *ausiliari* saranno palesemente proporzionali ad R ed R'.

Ciò posto , facendo ruotare la retta TAT' sulla circônferenza CD, il punto A descriverà una curva FAZ sviluppante di questo cerchio ; e la stessa retta ruotando in seguito su C'D', il punto a descriverà parimente una sviluppante *faz* di questa ultima circonferenza. Or si è veduto (*n. 53*) che queste due curve FAZ ed *faz* erano rispettivamente inviluppo ed inviluppata ; dunque (*n. 32*) sono questi i profili coniugati che fa d'uopo adottare pe'denti, affinchè passino per la linea dei centri nello stesso tempo archi eguali come AA' ed aa' misurati su'cerchi primitivi.

88. Per iscantonare i denti soddisfacendo alla condizione del *n. 68*, si osserverà che qui il punto x, in cui la retta AT' incontra la sviluppante $a'z'$, è precisamente il piede della normale abbassata dal punto A su questa curva ; dunque bisognerà prendere il raggio del cerchio di scantonamento almeno eguale ad Ox. Nello stesso modo pe' denti della ruota O', il raggio analogo dovrà eguagliare o sorpassare un poco la distanza O'x'. Inquanto all'incastro necessario per dar passaggio ai denti , dopo aver tracciata la sviluppante ZAF fino alla sua origine F sul cerchio ausiliare, si prolungherà questa curva (se bisogna) secondo un raggio FGO, fino ad una profondità tale che OG sia un poco minore della differenza fra O'O ed O'z; similmente , pel vuoto della ruota O' il raggio O'g del fondo dell'incastro dovrà essere un poco minore della differenza fraOO' ed OZ. Si deve osservare che qui i denti saranno in azione tanto prima che dopo la linea dei centri, ammeno che non si riducessero i denti della ruota *spingente* O' a non oltrepassare il cerchio primitivo , secondo la forma *gabh*: ma allora l' ingranaggio non sarebbe più reciproco.

89. Quantunque abbiamo lasciato arbitrario l'angolo TAO$=\varphi$

formato dalla tangente ai cerchi ausiliari colla linea de' centri, conviene però che quest' angolo sia almeno eguale alle tre quarte parti di un angolo retto, affinchè gl' incastri che debbonsi praticare nelle due ruote non fossero troppo profondi. Inoltre faremo osservare, che questo sistema d' ingranaggio è sovente preferito da'costruttori moderni a cagione de'due vantaggi seguenti:

1.° La larghezza dei denti va sempre aumentando fino all' estremità inferiore EF, ciò che li rende suscettivi di una più grande resistenza; mentre che nella *fig.14* i fianchi convérgono verso il centro, e la base dei denti si trova qualche volta bene indebolita.

2.° Quando un ingranaggio a sviluppante sia eseguito, si può diminuire o aumentare di una piccola quantità la distanza OO′ primitivamente adottata per l' allontanamento degli assi, senza che il sistema cessi di *funzionare* così regolarmente; è ciò molto vantaggioso nella pratica, in cui è per lo più difficilissimo situare gli assi rigorosamente alla stessa distanza loro assegnata nel disegno. Per giustificare siffatta latitudine immaginiamo che, nella *fig. 24*, siasi abbassato il centro O con i cerchi $\alpha\beta$ e CD, e che abbiano preso le posizioni O_1, $\alpha_1\beta_1$, C_1D_1 (il lettore li traccerà facilmente); allora, se si conduca una tangente comune alle due circonferenze $C_1 D_1$, $C'D'$, questa retta taglierà la linea de' centri in un punto A_1 che dividerà la distanza O_1O' in due parti, il cui rapporto sarà ancora lo stesso di quello dei raggi delle circonferenze $C_1 D_1$, e $C'D'$. D' altronde questa nuova tangente ruotando a vicenda su queste due circonferenze, descriverà col punto A_1 le stesse sviluppanti AZ ed *az*, le quali formavano già i profili dei denti dell' ingranaggio primitivo, eccettochè queste sviluppanti si toccheranno in altri punti corrispondenti, che nella prima posizione dell'ingranaggio. Dunque il nuovo sistema funzionerà come l'antico, producendo velocità angolari, le quali avranno lo stesso rapporto che avevano nel primo caso.

TAV. VII. FIG. XXV. 90. Dentiera *a denti obliqui.* Quando nella figura precedente, si suppone che il cerchio primitivo $\alpha'\beta'$ acquista un raggio infi-

nito, questo cerchio si cambia in una retta e la ruota O′ in una dentiera XY a denti obliqui, i cui profili *gaz*, *g′a′z′*,... sono rette perpendicolari a TT′; perocchè il cerchio ausiliare C′D′ avendo per raggio la perpendicolare abbassata dal centro O′ su TT′, viene a confondersi con quest'ultima retta; e siccome il punto di contatto si allontana nello stesso tempo all'infinito, se si vuol fare ruotare la retta TT′ su questa circonferenza degenerata in linea retta, ciascun punto *a* descriverà una perpendicolare *gaz* alla linea TT′. I contatti dei denti coniugati saranno ancora qui situati tutti sulla retta TT′ in *a*, *x*, *x′*; ma la spinta esercitandosi secondo una normale a *gaz*, cioè a dire secondo la TT′, la quale è *obliqua* alla direzione XY del movimento che dee prendere la dentiera, ne risulterà un attrito considerevole nelle *scanalature* che mantengono questo pezzo; e perciò il sistema della *fig.* 25 è men vantaggioso di quello della dentiera dritta(*fig.18*) A dippiù, quest'ultima è un caso particolare della *fig.25*: e propriamente quello in cui la retta arbitraria TAT′ sarebbe condotta perpendicolarmente sopra AO.

91. *L'ingranaggio a sviluppante può essere* INTERNO; ciocchè avviene quando i due cerchi $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, vengono abbracciati l'uno dall'altro. Allora, condotta sotto un angolo arbitrario la retta TAT′, e tracciati i due cerchi interni CD, C′D′, tangenti a questa retta e concentrici ad O ed O′, bisognerà ancora far ruotare la retta TAT′ successivamente sulle circonferenze CD, C′D′, per generare i profili GAZ e *gaz*, che saranno sempre sviluppanti del cerchio. Ma qui i due punti di contatto di questa tangente comune TAT′ essendo da una medesima banda rispetto al punto A, le sviluppanti volgeranno la loro concavità dello stesso verso; e ne risulterà un attrito molto più considerevole, per conseguenza delle piccole imperfezioni inevitabili ne' profili materiali. Epperò il sistema attuale, e generalmente tutti gl'ingranaggi *interni* sono di raro adoperati nella pratica. TAV. VII. FIG. XXVI.

Aggiungeremo solamente che dopo aver prolungata la sviluppante *zaf* fino alla sua origine *f* sul cerchio C′D′, si dovrà limitare l'altra sviluppante ZA al punto *corrispondente* G; per tro-

var questo, farà d' uopo (*n. 58*) riportare il punto *f* in *f'* sulla tangente TAT' mediante un arco descritto dal punto O', poscia trasportare il punto *f'* in G con un arco di cerchio descritto dal punto O. Finalmente si prolungherà il profilo *zaf* secondo un raggio *fg*O', di una quantità sufficiente affinchè l' incastro permetta al dente della ruota O di muoversi liberamente.

TAV. VII. FIG. XXVII. 92. Chiavelli e pestelli. Sia ABZ l'asse di una spranga verticale, che dee alternativamente salire della quantità AB e ridiscendere in seguito liberamente, abbandonata al suo proprio peso. Per produrre questo movimento rettilineo, analogo a quello della dentiera del *n. 75*, si adopera una ruota il cui asse orizzontale è proiettato in O, ed il cui cerchio primitivo $\alpha\beta$ è tangente alla verticale AZ; e si guarnisce questa ruota di chiavelli o denti AX, A_2X_2, A_3X_3, assai lontani gli uni dagli altri per lasciare al *pestello* il tempo di ricadere da B in A prima di essere preso dal dente seguente. Il profilo anteriore di questi chiavelli dee essere una sviluppante AXY del cerchio $\alpha\beta$; perocchè questa curva avrà la proprietà (*n. 75*) di toccare costantemente il *calcio* (mentonnet) orizzontale M del pestello, in un punto che resterà sulla retta AZ sempre normale alla sviluppante AXY, qualunque sia la posizione che prenda questa curva durante la rotazione intorno del punto O. L' estensione precisa AX che bisognerà dare a questo profilo perchè conduca il *calcio* da A fino a B, si otterrà (*n. 58*) descrivendo col raggio OB un arco di cerchio, che taglierà la sviluppante AY nel punto dimandato X. Si potrebbe terminare il chiavello col raggio AO; ma per evitare falsi contatti fuori della verticale AZ, ciocchè farebbe divergere la verga e produrrebbe attriti nocivi, si contorna il chiavello secondo una piccola curva AD arbitraria, la quale dee raccordare il raggio AO già tangente ad AX.

93. In quanto al calcio sul quale il chiavello esercita la sua spinta nella direzione verticale AZ, è desso un pezzo orizzontale e rettangolare, che nelle antiche macchine si fissava innanti la verga del pestello, come si osserva *fig. 28*; e la sporgenza EB doveva eguagliare la differenza fra i raggi OA ed OX *fig. 27*: ma

siccome allora la spinta del chiavello si esercitava molto lungi dal centro di gravità del pestello, ne risultava una *coppia* di forze che tendevano a far divergere la verga, producendo un attrito considerevole sulle *cosce* G e *g* fra le quali si muove questo pezzo. Per evitare così grave inconveniente, particolarmente quando il peso del pestello è considerevole, si pone in opera ordinariamente la disposizione proposta da *Montgolfier*, e ch'è rappresentata nella *fig*. 29. Qui la verga o sia il *manico* del pestello è formato di due parti TM e T_2N riunite dalle *cosce* laterali *J* ed *j*; di maniera che l'intervallo di M ad N offre un vuoto nel quale il dente AX del chiavello può penetrare, e facendo forza sulla faccia orizzontale M la quale fa le veci del calcio, questo chiavello solleva benissimo il manico nella direzione del suo asse ABZ, per condurlo da A in B. Arrivato in questa ultima situazione il pestello non ricade ancora, perchè resta tuttavia al chiavello da percorrere la metà della spessezza del calcio; ma questa piccola perdita di tempo diverrà quasi inapprezzabile, scantonando il dente *ax* secondo la curva indicata con punti rotondi, ciocchè bisogna far sempre per non lasciare in opera spigoli vivi o parti acute, che roderebbero le superficie e potrebbero produrre delle controspinte.

94. Un'altra combinazione *fig*. 30 è adoperata nelle miniere in cui i pestelli devono avere un peso considerabile. La verga T_3 è di un sol pezzo, ma si guarnisce con due calci laterali m', m'' sui quali *agiscono* i due rami x', x'' (*fig*. 31) del chiavello *ax*, il quale allora è *forcuto*. Noi supporremo qui che i tre chiavelli proiettati verticalmente sopra ax, a_2x_2, a_3x_3, siano forcuti e servano a far muovere il manico T_3, mentre che i chiavelli a dente unico AX, A_2X_2, A_3X_3 *agiscono* sul manico TMT_2; perchè si adattano così sullo stesso albero tanti ordini di chiavelli quanti sono i pestelli che debbonsi far muovere, avendo però cura di far corrispondere i chiavelli delle diverse serie a' raggi differenti OX ed O*x*, affinchè gli assi non sopportino nello stesso tempo il peso di tutti i pestelli. I tre denti di ciascuna serie sono di ferraccio, e fusi in un sol getto con l'anel-

lo che riunisce le loro basi; e questo anello, poligonale nella parte interna, si adatta sull' albero della ruota, il quale è di legno ed offre lo stesso numero di facce.

95. Per mantenere le verghe de' pestelli sempre nella stessa direzione verticale, lasciandole pur tuttavia la libertà di salire e di scendere, si costringono fra due pezzi orizzontali e paralleli (G, G'),(g, G') che diconsi *cosce*; le quali sono commesse insieme mediante alcuni *calastrelli*, che impediscono ancora la verga di allontanarsi a dritta ed a sinistra nella direzione dell'asse $O'O''$. Un secondo ordine di cosce (G_2, G''),(g_2, G'') è situato nella parte inferiore, ma ad un'altezza tale che non impedisca il corso del pestello. I segni in forma di X che si veggono sul disegno indicano, nel taglio de' legnami, gli estremi dei pezzi, o le sezioni fatte perpendicolarmente alle fibre del legname.

TAV. III. FIG. VIII. 96. Degli eccentrici. In alcune macchine si adopera una specie di ruota, il cui contorno esteriore non ha per centro di figura il centro del movimento di rotazione, ciocchè ha per oggetto di fare alternativamente salire e discendere una verga verticale AZ, ma gradatamente e non ad un tratto, come nel caso dei pestelli dei quali abbiamo ragionato. Questo contorno forma dunque una curva *eccentrica* che può offrire molte varietà; ma basterà di citarne un esempio, quello che si denota sotto la denominazione di *curva a cuore.* Sia AA_4 l'altezza a cui la verga dee salire: dopo aver diviso questo intervallo in parti eguali, 4 per esempio, si farà altrettanto per la mezza circonferenza descritta col raggio OA_4; poscia su' diversi raggi O1, O2, O3, si prenderanno le distanze

$$OB = OA_1,\ OC = OA_2,\ OD = OA_3,\ OE = OA_4,$$

e la curva ABCDE, aggiunta al ramo simmetrico AB'C'D'E, comporrà l'eccentrico dimandato. In fatti la verga AZ essendo ritenuta nella stessa direzione verticale dalle guide *m* ed *n*, quando si farà girare la ruota intorno del suo asse O, ed il raggio vettore OB avrà presa la posizione OA_1, la spinta obbliqua ch'essa esercita sulla verga avrà fatto salire questa, ed avrà

trasportato il suo piede A in A_1, poichè questo ultimo punto coinciderà con B. Parimente, quando il raggio OC sarà divenuto verticale, il piede A si troverà trasportato in A_2, e così di seguito fintanto che OE coinciderà con OA_4; indi il movimento di rotazione continuando nello stesso verso, il ramo ED′C′B′A lascerà discendere la verga gradatamente da A_4 fino ad A.

97. Questo sistema s'impiega nei casi in cui non bisogna esercitare uno sforzo grande sulla verga; ed anche allora fa mestieri cercare di diminuire l'attrito prodotto dalla spinta obbliqua. Per ciò si guarnisce il piede della verga di un *disco* mobile intorno l'asse orizzontale A, e si adotta per contorno della ruota una curva *abcded′b′a* che sia equidistante dell'eccentrico primitivo; questa nuova curva si traccia facendola girare tangenzialmente ad alcuni archi di cerchio, descritti dai diversi punti di ABCD. . . . con un raggio costantemente eguale a quello del disco. Con ciò il movimento rettilineo della verga rimarrà lo stesso che nel primo caso, ed in vece di un attrito di strisciamento non vi sarà più che un attrito di rotazione, il quale è molto minore.

98. Quando si vuole evitare il subito cangiamento di velocità che ha luogo ne' punti estremi A ed A_4, si divide l'intervallo AA_4 in parti disuguali mediante una mezza circonferenza descritta su questa distanza come diametro, e che dividesi in archi eguali; le ordinate di questo mezzo cerchio somministrano i punti $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ e la curva ABCDE costruita come di sopra, non presenta più alcun punto saliente. Noi lasciamo la cura al lettore di tracciare l'eccentrico in questa nuova ipotesi.

99. Osservazioni. Abbiamo fatto considerare diverse volte che per tale sistema d'ingranaggio, la spinta dei denti non si esercitava, se non *dopo la linea dei centri* nel verso del movimento, mentre per tale altro sistema entravano in azione alcuni denti *prima della linea dei centri*. Giova fare questa distinzione, a cagione degl'inconvenienti gravi che presenta sovente l'ultimo di questi due casi.

Dapprima bisogna rammemorarsi che in tutti gl'ingranaggi

esaminati di sopra, i profili dei denti non ruotano semplicemente l'uno sull'altro, ma che evvi ancora uno strisciamento (*n. 41*) il quale è talune volte molto considerevole, come si è osservato a' numeri 57 e 58.

Da ciò risulta un attrito ch'è proporzionale alla pressione esercitata dai denti l'uno sull'altro, e che assorbe una parte della forza motrice: or questa perdita di forza è di maggior considerazione per due denti che sono alle prese avanti la linea dei centri, che per due denti analoghi i quali non sarebbero in contatto se non dopo la stessa linea. Questa proposizione che l'esperienza conferma, si stabilisce mediante i principî di meccanica e del calcolo, la cui esposizione ci menerebbe troppo lungi dallo scopo grafico di questa opera; e però ci contenteremo di giustificarla con le considerazioni seguenti.

TAV. VII. FIG. XXXII. 100. Ammettiamo che nella *fig. 32* O' sia la ruota spingente, e che giri nel verso indicato dalla freccia φ''. Può avvenire, sia per cagione del piccolo numero dei denti, sia per cagione di qualche irregolarità nella loro esecuzione, che ad un certo istante la spinta delle due ruote non si eserciti più che da un solo punto *m*, che corrisponde all'ultimo elemento del profilo $a''z''$: allora la punta z'', o piuttosto lo spigolo vivo ch'è proiettato sul punto z'', sarà paragonabile al taglio di uno scalpello le cui facce sarebbero simmetriche per rapporto al piano diametrale $O'z''$. Or fintanto che il movimento ha luogo nel verso φ'', il contatto cammina da *m* verso A''; e l'angolo $O'z''A''$ essendo acuto, lo scalpello non fa che strofinare sulla superficie $G''A''z''$ e pulirla senza roderla. Ma se cambiasi l'ordine, e che O divenendo la ruota spingente essa giri nel verso della freccia φ, allora il taglio dello scalpello camminerà da *m* verso G'', dalla banda dell'angolo ottuso $O'z''G''$: conseguentemente tenderà a penetrare nella superficie $A''Z''$, la roderà *leggiermente*, ed apporterà assai maggiore resistenza al movimento di rotazione dello ingranaggio; qualche volta ancora, sotto lo sforzo di una grande pressione, lo spigolo z'' penetrerà tanto addentro nella superficie $A''G''$ da non potersi più sviluppare, e vi sarà una con-

trospinta, che fermerà immediatamente la macchina, o farà rompere uno dei denti così imbiettati. Per questo motivo giova sempre scantonare i denti, ed aver cura di rotondare anche gli spigoli prodotti da questa scantonatura.

101. Ma anche quando queste precauzioni siano state prese, restano sempre delle scabrosità inevitabili sul legno e sul ferro fuso, che han servito a formare i denti; e queste scabrosità producono, quantunque di una maniera meno efficace, effetti analoghi a quelli che abbiamo descritti nel n.° precedente. Da ciò dee dedursene, conforme ai risultamenti dell'esperienza, che l'attrito e la perdita della forza motrice sono sempre più considerevoli per due denti che si spingono avanti la linea dei centri, che per quelli i quali vengono in contatto dopo questa linea. Inoltre, nel primo di questi casi può anche darsi luogo a controspinta, quantunque il dente $a''z''b''$ sia scantonato, se per qualche piccola irregolarità avvenga che la spinta delle due ruote non si faccia che mediante l'ultimo elemento del profilo conservato $a''\ z''$, e che la pressione sia considerevole. Sicchè noi possiamo stabilire questo principio generale: in ogni ingranaggio, *fa mestieri*, per quanto è possibile, *evitare che i denti comincino ad essere in contatto prima della linea dei centri*.

102. Per adempiere a questa condizione il primo mezzo sarebbe di sopprimere in una delle ruote, O′ per esempio, tutte le porzioni dei denti che sarebbero al difuori del cerchio primitivo $\alpha'\ \beta'$, siccome lo dimostrano le *fig.* 17, 18, 20, 22, 23, e di esigere che la ruota O fosse sempre la ruota dirigente, sia a dritta sia a sinistra; perchè allora ben si scorge che la spinta non si eserciterebbe se non dopo la linea dei centri. Si potrebbe ottenere lo stesso vantaggio nell' ingranaggio a sviluppanti della *fig.* 24, se si riducessero i profili dei denti di O′ alle parti interne *gfa*, *heb*,... Gl' ingranaggi di questo genere, in cui una sola delle ruote può dirigere, sono dette *senza reciprocità*.

103. Ma questa disposizione offrirebbe degl' inconvenienti sulle grandi macchine, a movimenti rapidi, e a resistenze disugualissime, in cui le velocità sono regolarizzate mediante l' uso

dei volanti. Perocchè allora in ragione delle piccole variazioni periodiche cui va soggetta la velocità, ed a cagione del gioco che deve sempre esistere fra'denti (*n.° 61*), ciascuna delle due ruote, continuando sempre a muoversi nel medesimo verso si trova talvolta *spingente* e talvolta *spinta*. Ora per adempiere questo doppio magistero esse debbono tutte due essere guarnite di denti salienti al di fuori dei cerchi primitivi, come si osserva nella *fig.* 32, in cui l'ingranaggio è detto *reciproco*. Laonde per conservare questo vantaggio senza cascare nello inconveniente di avere de'contatti, tanto prima che dopo la linea dei centri, bisognerà *demagrir i denti dalla banda opposta a quella in cui il movimento dee aver effetto,* val quanto dire togliere le parti che abbiamo tratteggiato nella *fig. 32;* ma il sistema non potrà muoversi che da un sol verso, quello indicato dalle frecce φ e φ' (*).

104. *Limite del numero de' denti*. Alla spinta di una coppia di denti dee succedere, senza alcuna interruzione, la spinta di un'altra coppia, a fine di evitare gli urti retrogradi che si addimandano scosse (*des à—coups*): fa mestieri adunque che all'istante in cui i due denti GAZ e gaz cominciano a toccarsi sulla linea dei centri in A, i denti G'A'Z' e $g'a'z'$ della coppia precedente siano tuttavia in contatto. Ora, abbassando la normale Ax sul profilo $a'g'$ (rettilineo o pur no) si sa che il piede x di questa normale dee essere (*n.° 34*) il punto di contatto della inviluppata $a'g'$ con l'inviluppo A'Z'; se dunque questo punto x giace al disotto del vertice Z' del dente della ruota O, la condizione dimandata sarà adempiuta; altrimente vi saranno scosse, e per evitarle, bisognerà ravvicinare i denti aumentando i loro numeri n ed n', che dovranno sempre essere scelti proporzionali a'raggi R ed R' de' cerchi primitivi. Siegue da ciò che il nu-

(*) Questo procedimento, del pari che le osservazioni precedenti, sono tratte dalle lezioni che il sig. *Savary* aveva compilato pel suo corso di macchine alla Scuola Politecnica.

mero n' dei denti della ruota piccola ammette un *minimo*, che varia con la natura dei profili e col rapporto delle velocità angolari; epperò, cercando di determinare mediante il calcolo la posizione del piede della normale Ax, il Sig. *Savary* à trovato i limiti seguenti, in cui m dinota il rapporto $\frac{R'}{R}$ ch'è sempre minore della unità.

In un ingranaggio con fianchi . . . $n' = o, > 10 (1 + m)$.
In un ingranaggio a lanterna. . . . $n' = o > 7 + 4m$.
In un ingranaggio a sviluppanti . . $n' = o > 16 + 2m$.

Noi non rapporteremo i calcoli i quali conducono a questi resultati, perchè possono essere sostituiti con vantaggio in ciascuno esempio dalla *verificazione* grafica citata di sopra, la quale non esige che la traccia provvisoria di due denti.

CAPITOLO IV.

INGRANAGGI CONICI.

105. Si addimanda così il sistema di due ruote i cui assi invece di esser paralleli vanno ad incontrarsi sotto un angolo qualunque. Siano Z'O' e Z'o' questi due assi, situati qui sul piano verticale del nostro disegno; si comincerà dal tracciare nell' angolo O'Z'o' una retta Z'A' tale, che le due perpendicolari abbassate da uno qualunque dei suoi punti sopra i due assi, siano in ragione inversa delle velocità angolari (*n. 29*) che si vogliono imprimere alle due ruote, cioè in ragione inversa del numero de'giri che queste ruote devono fare nello stesso tempo: questi numeri essendo assegnati dalla quistione, la determinazione grafica della retta Z'A' è troppo facile per intrattenercene maggiormente. Indi secondo la grandezza più o meno considerevole che si vorrà dare alle due ruote, si sceglierà sulla retta Z'A' un punto A' più o meno lontano da Z', e dal quale si abbasseranno sugli assi le perpendicolari A'O' ed A'o'; queste saranno i raggi dei *cerchi primitivi*, i quali serviranno di basi TAV. VIII. FIG. 1.

a'due coni di rivoluzione Z'A'O' e Z'A'o', ciascuno de'quali sarà per così dire il nocciuolo di una delle ruote.

106. Ora per ottenere fra le velocità angolari il rapporto dianzi assegnato, basterà evidentemente far girare i due coni primitivi intorno de'loro assi immobili, di maniera tale che le circonferenze A'O' ed A'o' prendano ***velocità assolute eguali*** (*n. 30*). Or per soddisfare questa condizione mediante la spinta di due denti corrispondenti, bisogna terminar questi denti con due superficie coniche aventi il loro vertice comune in Z', e di cui l'una sia ***l'inviluppo*** dello spazio che percorrerebbe l'altra, se lasciando interamente immobile il cono Z'A'O' si facesse ***ruotare*** su questo il cono Z'A'o', che trasporterebbe con esso la superficie de'suoi denti, perchè applicando qui i particolari che abbiamo dato ai n.i 32 e 33, si scorgerà chiaramente che questo ***ruotamento*** conduce i due coni primitivi nella stessa ***situazione relativa,*** come se avessero girato intorno de' loro assi immobili; e di maniera da far percorrere ***archi eguali*** da due punti qualunque delle circonferenze A'O' ed A'o'.

107. Secondo questo principio la soluzione la più semplice si otterrà formando: 1.° il dente della ruota piccola con un piano condotto per l'asse Z'o', e che prende il nome di ***fianco***; 2.° il dente della ruota grande, con una superficie conica che sia costantemente tangente a questo fianco, in tutte le posizioni che occuperà durante il ruotamento del cono primitivo Z'A'o'; e noi andiamo a vedere che questo cono, ***inviluppo*** del fianco, à per base un'epicicloide sferica.

Nel piano del cerchio primitivo il cui raggio è A'o' (piano che noi chiameremo il ***piano ausiliare*** della proiezione, ed il quale è abbassato qui con questo cerchio secondo A'G'e'), tracciamo una circonferenza A'F'o' che abbia per diametro il raggio A'o', e facciamola ruotare successivamente: 1.° sul cerchio primitivo del raggio O'A', conservando sempre fra i loro piani l'inclinazione indicata dall'angolo o'A'X; 2.° nell'***interiore*** e nel piano del cerchio primitivo, il quale ha per raggio o'A'. Durante il primo movimento di rotazione, un punto qualunque

della circonferenza mobile, per esempio quello ch'è abbassato in *m* sul piano orizzontale descriverà un'epicicloide sferica, della quale sappiamo trovare la proiezione orizzontale DM (*n. 14*) ed il cui cono generatore A'S'*o*' si ottiene elevando per il centro ω' la perpendicolare ω'S' sul piano del cerchio mobile: in guisa che questa epicicloide è situata interamente sulla sfera descritta col raggio S'A'; inoltre se si abassa il punto (M,M') in F sul piano ausiliare, si sa (*n. 2*) che la retta proiettata secondo (A'M,A'M'), e che ha per vera posizione A'F sul piano ausiliare, è una normale della epicicloide al punto (M,M'). D'altra banda durante la rotazione del cerchio A'F*o*' sopra A'G*e*', lo stesso punto generatore (M,M') o F descriverà un'epicicloide rettilinea (*n. 7*), che sarà precisamente la retta *o*'FG. Ciò posto, se si conduca un piano per questa retta *o*'FG e per l'asse Z'*o*', io dico che questo piano meridiano sarà tangente al cono, che avrebbe per vertice il punto Z' e per base l'epicicloide proiettata sopra DM. In fatti, se si osserva che il piano meridiano in quistione ha per traccia verticale Z'*o*'X, e per traccia sul piano ausiliare la linea stessa *o*'F, si riconoscerà facilmente che questo piano è perpendicolare sulla retta abbassata secondo A'F, e proiettata secondo (A'M,A'M'); or poichè questa retta è normale all'epicicloide, è certo che il piano meridiano Z'*o*'F contiene la tangente di questa curva al punto (M,M'); e siccome passa parimente pel vertice Z' del cono epicicloidale, esso sarà effettivamente tangente a questa superficie, lungo la generatrice che riunirà il vertice Z' con il punto F rialzato in (M,M').

Inoltre questo contatto continuerà ad aver luogo lungo una generatrice variabile sopra questo cono epicicloidale, mentre che il cono primitivo Z'*o*'A' ruoterà sul cono Z'O'A'; poichè per tutte le posizioni del punto F sul piccolo cerchio, le due corde A'F, ed *o*'F, A'F_2 ed *o*'F_2,... saranno sempre perpendicolari l'una all'altra. Dunque il piano Z'*o*'F è adattatissimo a formare il *fianco* di un dente della ruota Z'*o*'A, poichè sarà toccato costantemente e condotto dal dente che termina il cono epicicloidale (Z',DM), della stessa maniera che se il cono pri-

mitivo Z'o'A' ruotasse senza strisciare sull'altro cono Z'O'A': ciocchè soddisfarebbe benissimo la condizione del *n. 106*.

108. Resta a trovare l'estensione precisa che deve avere il fianco per corrispondere a un arco limitato DM della epicicloide. A questo oggetto, abbassiamo il fianco Z'o'F sul piano verticale, intorno dell'asse Z'o': in questo movimento il punto F descriverà l'arco di cerchio F*f* il cui centro è in o'; e la retta Z'*f* sarà il rabbassamento della generatrice di contatto che termina al punto (M,M').

Ma al momento che il fianco passava per l'origine D dell'epicicloide, toccava il cono epicicloidale secondo la generatrice proiettata sopra O'D, la quale si abbasserà evidentemente sopra Z'A'. Dunque l'angolo A'Z'*f* misura in grandezza effettiva sul fianco, lo spazio angolare ch'è stato condotto e toccato dal dente epicicloidale, mentre che il fianco ha ruotato dal punto D fino ad (M,M'). Farà dunque mestieri restrignere l'esecuzione del fianco a questa parte angolare A'Z'*f*, se il dente fosse ridotto alla porzione di cono che corrisponde all'arco DM.

109. Ma questa costruzione non sarebbe di un'applicazione comoda nel disegno generale che segue, atteso che non conosceremo immediatamente se non la proiezione orizzontale M dell'estremità dell'arco DM, con la sfera Z'A'P'o' sulla quale è situata l'epicicloide. In questo caso bisognerà abbassare il punto M in R, proiettare quest'ultimo in P' sul cerchio massimo della sfera, ed abbassare sull'asse Z'O' la perpendicolare P'K', che rappresenterà il parallelo sul quale dee esser situato il punto dell'epicicloide proiettato in M. Allora questo parallelo P'K' taglierà il cerchio generatore che ha per diametro A'o', secondo una corda proiettata nel punto M'; si abbasserà questa corda secondo M'F che farà conoscere il punto F, dal quale si dedurrà *f* ed il resto come qui sopra.

TAV. VIII. FIG. II. 110. *Traccia del disegno*. Siano Z'O' e Z'o' gli assi delle due ruote, situate nel piano verticale di proiezione; siano ancora A'O' ed A'o' i raggi dei *cerchi primitivi*, che si determineranno come si è detto al *n. 105*: questi due cerchi sono rappresen-

tati, sopra i due piani (*fig.3* e *4*) perpendicolari agli assi, dalle circonferenze OA ed *oa*.

Dopo avere scelto due numeri interi *n* ed *n'*, i quali siano fra loro nello stesso rapporto dei raggi primitivi, si dividerà la circonferenza OA in *n* parti eguali AA_1, A_1A_2,..... e la circonferenza *oa* in *n'* parti eguali aa_1, a_1a_2...; ed avverrà necessariamente (*n. 60*) che le divisioni AA_1, ed aa_1 saranno della stessa lunghezza assoluta. Indi si suddividerà ciascuno di questi archi in due parti delle quali una AB, destinata a formare la base del dente, sia minore dell' altra BA_1 di circa un *dodicesimo* dell'arco totale AA_1 (*vedete n. 61*).

111. Premesso ciò, nel piano del cerchio primitivo A'*o'*, e su questo raggio come diametro, descriviamo un cerchio, il quale è rabbassato qui secondo ω''A; poscia facciamolo ruotare sulla circonferenza O'A', conservando fra i loro piani l' inclinazione primitiva O'A'*o'*. In questo movimento il punto (A,A') del cerchio mobile descriverà un'epicicloide situata sulla sfera la quale ha per raggio *s*'A', e per costruire questa curva senza spostare il contatto attuale A de' due cerchi, si prenderanno due archi eguali A*m* ed AI, da cui si dedurranno (*n. 14*) le proiezioni M,M' di un punto della epicicloide che avrebbe la sua origine in I; ma siccome l' origine è realmente in A, si scorgerà bene che basta prendere l' arco $\rho\mu$ eguale ad RM, per ottenere un punto μ della proiezione orizzontale $A\mu\lambda$ dell' epicicloide dimandata. Allora il cono che avrà per base questa epicicloide e per vertice il punto (Z',O), formerà (*n. 107*) il dente che comincia in (A,A'); ma resta tuttavia a trovarne le intersecazioni colle due superficie coniche inferiore e superiore, le quali terminano il nocciuolo della ruota, e di cui non abbiamo ancora parlato. TAV. VIII. F. II. E III.

112. Pel punto A' conduciamo una retta indefinita A'Q' formante con A'Z' un angolo un poco più grande di 90°; poscia dopo aver segnato la lunghezza A'α' che si vuol dare a ciascun dente, conduciamo la retta α'V' parallela ad A'Q', e facciamo girare queste due parallele intorno dell'asse verticale (O,O'Z'); produrremo così due coni di rivoluzione che si faran terminare

a'due cerchi orizzontali $Q'Q''$, $V'V''$, abbastanza distanti affinchè il solido da essi compreso offra una resistenza sufficiente: questo solido forma ciò che chiamasi la *tenuta* ch'è talvolta traforata, come nella tavola V; mentrechè la parte compresa fra i due coni descritti da $A'Q'$ ed $\alpha'V'$ forma la *corona* nella quale sono intagliati i denti e gl'incastri, e che dovrà esser prolungata fino ad un certo limite Z' N' P' dipendente dalla sporgenza che si vorrà dare ai denti, come orora spiegheremo(n. 114).

Inquanto alla piccola ruota, si condurrà la retta $A'q'$ in una direzione presso a poco simmetrica ad $A'Q'$ rispetto alla linea $A'Z'$; poscia dal punto α' si menerà $\alpha'v'$ parallela ad $A'q'$, e si faran terminare i due coni, che queste parallele descrivono intorno a $Z'o'$, da'due cerchi di tenuta $v'v''$ e $q'q''$. Finalmente si prolungheranno questi stessi coni fino al limite $Z'n'p'$, che insegneremo come assegnare per la sporgenza dei denti di questa seconda ruota.

113. Ritorniamo ora al cono epicicloidale, che aveva il suo vertice in (O', Z') e per base l'epicicloide proiettata in $A\mu\lambda$, e cerchiamo la curva ACL secondo la quale si proietta la sua intersecazione col cono inferiore descritto dalla rivoluzione della retta $A'Q'$. Siccome questa epicicloide è situata sulla sfera che ha per raggio $s'A'$, se tagliamo questa superficie e i due coni dianzi mentovati mediante un piano verticale come $O\lambda$, e che lo abbassiamo sul piano verticale facendolo girare intorno all'asse $(O, O'Z')$, sarà palese che il punto λ si trasporterà in λ', e che $Z'\lambda'$ sarà il rabbassamento della generatrice del cono epicicloidale; dunque prolungando questa retta fino ad L' dove taglia la generatrice $Q'A'P'$, e riportando con un arco di cerchio il punto L' in L sopra $O\lambda$, quest'ultimo punto L apparterrà alla proiezione dimandata ACL.

114. Da questa si dedurrà la curva BD simmetrica ad AC per rispetto alla *linea media* del dente, sulla quale queste curve andranno ad incontrarsi; ma siffattamente prolungandole, le due facce coniche del dente si taglierebbero a spigolo vivo, ciò che fa mestieri evitare accuratamente (n. 67 e 100); perciò si

scantona il dente, tracciando un arco di cerchio PCD situato un poco al di sotto dal punto di sezione delle curve AC e BD, onde ne risulta una nuova faccia conica, avente per vertice il punto (Z',O) e per base un arco della circonferenza (PCD, P'P''). Questo cerchio di scantonamento è quello appunto che determina il limite Z'P'di cui abbiamo parlato al n. 112; e la vera misura dell' agetto che presentano i denti al di sopra del cono primitivo Z'A'O', è espressa dall'angolo A'Z'P'.

Il cono superiore della corona, descritto dalla rivoluzione della retta α' V', sarà tagliato dalle facce coniche del dente secondo le curve $\alpha\gamma$,$\zeta\delta$ manifestamente *simili* ad AC e BD, poichè le generatrici a'V' ed A'Q' sono parallele; di maniera che si potranno tracciare queste curve col mezzo di raggi vettori proporzionali.

115. Rispetto alla piccola ruota, dopo aver tracciato un cerchio orizzontale sopra (OA, O'A') come diametro, si farà ruotare il cono retto S'A'Ω' sul cono S'A'o': il punto (A',a) del cerchio mobile descriverà un' epicicloide situata sulla sfera che ha per raggio S'A', la cui proiezione $a\mu'$ si costruirà sul piano ausiliare della fig. 4; poscia, immaginando un cono che abbia per base questa epicicloide e per vertice il punto (Z',o), si cercherà l' intersecazione di questo cono epicicloidale con il cono della corona, descritto dal rivolgimento della retta A'q' intorno all' asse Z'o', ciò che somministrerà la proiezione ac del contorno del dente. Da questa si dedurranno per simmetria le diverse curve b_1d_1, a_1c_1,...che si taglieranno prima del loro incontro col cerchio di scantonamento pd_1c_1, il quale farà conoscere il punto p' e l'agetto A'Z'p' che presenteranno i denti di questa ruota al di fuori del cono primitivo Z'A'o'. Or non facciamo che indicare queste diverse operazioni, perchè sono tutte simili a quelle che abbiamo effettuate per la prima ruota.

Osservazione. Quantunque la sporgenza del dente abbia per limite rigoroso la retta Z'p', sarebbe utile, ad oggetto di lasciare qualche *vento* alla macchina, di tracciare un'altra retta Z'p'' un poco più distante dall'asse, e di considerare quest' ultima come

il limite fittizio del dente, quando si tratterà, qui appresso, di determinare l'estensione dei fianchi e degl' incastri della ruota grande.

116. *Limiti dei fianchi.* Abbiamo veduto al n. 67, che i fianchi della ruota grande che saranno condotti dai denti della piccola, sono i piani verticali OA, OA_1, OA_2,... ma per determinare la parte utile di questi piani, vale a dire quella ch' è successivamente toccata dalla porzione del cono epicicloidale corrispondente all' arco finito *ac*, bisognerà ricorrere al metodo del n. 109. Sicchè, dal punto p'' in cui la generatrice estrema $Z'p''$ del cono epicicloidale incontra il cerchio massimo $O'p''A'$ della sfera che contiene l' epicicloide in parola, abbassiamo sull' asse $Z'o'$ la perpendicolare $p''k'$; essa taglia il diametro $O'A'$ del cerchio generatore nel punto 2 che si proietterà in 3 sul piano verticale, e la retta $Z'4$ che si prolungherà fino in F' dove incontra il cono inferiore della corona, farà conoscere quella parte angolare $A'Z'F'$ del fianco la quale è condotta dal dente corrispondente all'arco *ac*. Nondimeno, siccome la retta $Z'F'$ incontra parimente il cono superiore della corona al punto φ', dee dirsi che la grandezza precisa dal fianco è data dal trapezio $A'\alpha'\varphi'F'$, di cui gli angoli F' e φ' forniranno sul piano orizzontale le circonferenze, alle quali farà mestiere che terminino i lati de' fianchi AF, $\alpha\varphi$, BE,...

Per la ruota piccola, si troveranno d'una maniera simile i lati de' fianchi *af*, *be*, . . . , operando sulla generatrice $Z'P'$ del cono epicicloidale, che forma il dente della ruota grande.

117. *Limite degl' incastri.* Invece di far girare le due ruote intorno ai loro assi immobili, possiamo, giusta il principio del n. 33, lasciare il cono $Z'A'O'$ interamente fisso, e far girare su questo il cono $Z'A'o'$, che trasporterà seco il dente corrispondente all' arco *ac*. Durante questa rotazione, lo spigolo estremo $Z'p''$ del dente genererà una superficie conica avente il suo vertice in Z', e per base l' epicicloide allungata che sarà descritta dal punto x, in cui questo spigolo va a tagliare il piano del cerchio mobile $A'o'$; e le intersecazioni di questa superficie

con i due coni che terminano la corona della ruota grande, indicheranno evidentemente i limiti dell'incastro da praticarsi, affinchè il dente della piccola ruota possa muoversi liberamente.

Ad oggetto di costruire senza confusione questa epicicloide allungata, che giacerà interamente sulla sfera $x'y'$ descritta col raggio $Z'x'$, trasportiamo il triangolo $Z'A'O'$ nella situazione $Z''A''O''$, e tracciando la retta $A''x''$ eguale e parallela ad $A'x'$, avremo le proiezioni x'' ed x del punto generatore quando è giunto nel piano verticale; d'altronde il cerchio $x''y''$ descritto colla distanza $Z''x''$ per raggio rappresenterà la sfera che contiene l'epicicloide cercata. TAV. VIII. F. II. E III.

Ciò posto, se si traccia il cerchio $A''B''$ col raggio $O''A''$, ed il cerchio $A''b''$ con un raggio $o''A''$ scelto eguale ad $o'A'$, quest' ultimo sarà il rabbassamento del cerchio movibile che deve ruotare sull'altro; di maniera che prendendo due archi eguali $A''M = A''m$, e prolungando il raggio $o''m$ di una quantità mG eguale ad $A''x''$, il punto G sarebbe il rabbassamento, e g, g', le proiezioni del punto generatore, quando la rotazione avrà fatto percorrere l'arco $A''M$, se l'origine di questa rotazione fosse in M; ma siccome questa origine è veramente in A'', si scorgerà bene che bisogna tracciare la circonferenza $gihl$, e portare l'arco gi da h in l per ottenere un punto della proiezione lx dell' epicicloide dimandata.

Ora bisogna immaginare un cono che abbia il suo vertice in Z'' e per base l'epicicloide proiettata sopra lx, e cercarne l'intersecazione con il cono inferiore della corona della ruota grande, il quale avrà per generatrice, sulla *fig.* 5, la retta $A''Q''$ condotta parallelamente ad $A'Q'$ della *fig.* 2. Dapprima, la generatrice $Z''x''$ del cono epicicloidale somministrerà, col suo incontro con $A''Q''$ un punto (X'',X) dell'intersecazione dimandata. Consideriamo poscia la generatrice qualunque proiettata sopra $O''l$, ed abbassiamola sul piano verticale: il punto dell' epicicloide proiettato in l, essendo alla medesima altezza di g', esso si trasferirà in k' sulla sfera $x''y''$; la generatrice sarà dunque abbassata secondo $Z''k'$, ed allora taglierà $A''Q''$ nel punto

(r', r); in guisa che non farà mestieri, che riportare con un arco di cerchio il punto r in L sopra Ol, per ottenere un punto della curva E″LX, secondo la quale si proietta orizzontalmente l'intersecazione dei due coni di sopra indicati.

118. Ed è appunto questa curva E″ LX che bisognerà trasportare sulla *fig. 3* secondo EH, coll'avvertenza di situare il punto E″ (che ora andiamo a determinare) all'estremità E del fianco BE, ed il vertice X sul cerchio *limite* THG, il quale si deduce dal punto T′ in cui la corona della ruota è incontrata dallo spigolo Z′$p''x'$. Rispetto al punto E″ della *fig. 5*, se si terrà ben presente la rotazione del cono primitivo Z′Ao' sul cono immobile Z′A′O′, si riconoscerà facilmente che bisogna prolungare il cerchio B″A″ di una quantità A″U″ eguale all'arco $b_1 u$ della *fig. 4*; indi condurre il raggio O″U″, sul quale si prenderà la lunghezza U″E″ eguale al fianco BE della *fig. 3*.

Sul cono superiore della corona il cerchio *limite* $\theta\eta$ sarà somministrato dal punto θ', in cui la generatrice N′α'V′ è tagliata dallo stesso spigolo Z′$p''x'$; e la curva $\varepsilon\eta$ essendo *simile* ad EH si dedurrà da quest'ultima mediante raggi vettori proporzionali.

La proiezione verticale delle curve che formano il contorno dei denti si conchiuderà dalla proiezione orizzontale, riportando i diversi punti di questa sopra i cerchi orizzontali ai quali appartengono; ma questo tracciato che noi qui abbiamo effettuato, dee esser riguardato come un complemento della rappresentazione grafica, perocchè esso è interamente inutile pe' costruttori; epperò sul piano verticale della ruota piccola non abbiamo figurato che un semplice *taglio*.

119. *Sviluppo delle sagome.* Per eseguire questo ingranaggio, è necessario di conoscere, *in grandezza effettiva*, le intersecazioni delle diverse facce del dente e dell'incastro con i due coni della corona, che sono generati mediante la rotazione delle rette parallele P′A′Q′ ed N′α'V′ intorno dell'asse O′Z′. Si svilupperanno quindi queste due superficie coniche col noto metodo del num. [251], cercando primieramente la posizione dei loro vertici su quest'asse; così per esempio, pel cono P′A′Q′ si

descriverà con il suo apotema una circonferenza, sulla quale si prenderanno parecchi archi eguali in grandezza assoluta a PC, CD,... e su' raggi che corrispondono a questi punti di divisione, si porteranno le lunghezze delle porzioni di generatrici comprese fra il cerchio P'P'' ed i diversi punti proiettati in A,B,E,H,..

120. Dopo aver tagliato il solido di tenuta e della corona, si applicheranno sulle due pareti coniche corrispondenti a P'Q', N'V', le sagome di cui venghiamo di far parola, costruite di cartone flessibile, affinchè facendole piegare possano coincidere perfettamente con queste superficie; in questo stato, le curve *trasformate* avranno ripreso la primitiva forma a doppia curvatura, e si segnerà allora sulle pareti coniche il contorno effettivo dei denti e degl'incastri. Indi non vi sarà d'uopo che di ultimare le superficie coniche dirette verso il vertice Z', mediante lo spigolo di una riga che si farà scorrere sui contorni inferiore e superiore, colla precauzione di appoggiarla nello stesso tempo su i punti di direzione di una stessa generatrice, punti dati dalla traccia stessa della sagoma.

121. *Osservazione*. Per ciò che riguarda gl'incastri, abbiamo voluto spiegare il metodo rigoroso che servirebbe a toglicre il solido *minimo*, e lascerebbe così al dente la più grande resistenza possibile; ma, nella pratica, per non aumentare vieppiù le difficoltà di esecuzione che presenta questo ingranaggio, è bastevole determinare i cerchi limiti THG, $\theta\eta$, mediante due punti di sezione T', θ', segnati sul piano verticale della *fig.* 2; e si prolungano in linea retta le parti de' fianchi BE, AF, $\zeta\varepsilon$... fino a queste due circonferenze limiti; ovvero si raccordano i loro estremi con queste circonferenze mediante una piccola curva arbitraria, ma situata visibilmente al di fuori del limite rigoroso EH. Questa semplificazione che dovrà esser sempre adoperata, non nuoce affatto al cammino regolare dell'ingranaggio; ma non è lo stesso del metodo seguente.

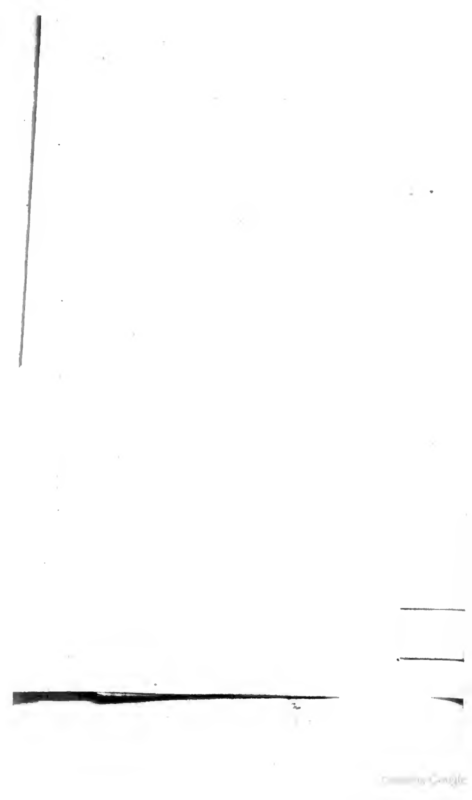
122. *Metodo approssimativo*. Per evitare le lungherie e le difficoltà che presenta il disegno dell'epicicloidi sferiche, molti costruttori si permettono di sostituirvi l'epicicloidi piane, che

determinano nella maniera seguente. Dopo di aver fissati i raggi primitivi A'O' ed A'o', essi conducono pel punto A' e perpendicolarmente alla generatrice Z'A' un piano, che chiamo *piano ausiliare* e che va a tagliare gli assi delle ruote in due punti, che dinoterò con O_2 ed o_2; in questo piano ausiliare essi descrivono due cerchi con i raggi O_2A', o_2A', ed operano come se queste due circonferenze dovessero girare l'una sull'altra, ciò che non è lontanissimo dal vero, almeno pel corto intervallo durante il quale ha luogo la spinta dello stesso dente.

Sicchè, dopo aver abbassato il piano ausiliare con le due circonferenze ch'esso comprende, si riporteranno su quest'ultime le divisioni eguali segnate sui cerchi primitivi, e si costruirà il profilo di un dente di ciascuna ruota, come per un ingranaggio cilindrico (*n.62.*). Indi, come qui si fan terminare le *corone* delle due ruote d'angolo colle superficie coniche che descriverebbero le rette $A'O_2$ ed $A'o_2$ girando intorno agli assi rispettivi, i profili costruiti qui sopra sostituiranno le sagome sviluppate sulla *fig. 6*; di maniera che basterà applicare questi profili sulla corona stessa, per poter eseguire le diverse facce dei denti e degl'incastri, siccome abbiam detto al *n. 120.*

FINE.





Tav. II.

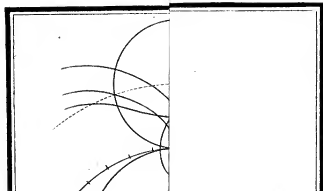


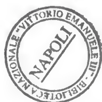



NAPOLI


IV

Tav IV

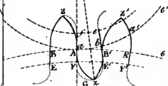



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" -
NAPOLI

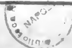


Tav. V.

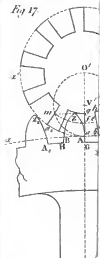


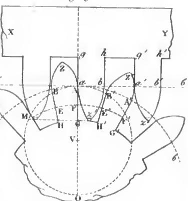




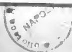


Tav VI





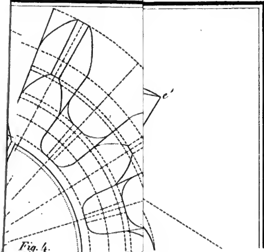











c'
Fig. 4.



